新兴边缘学科·青年科学家丛书

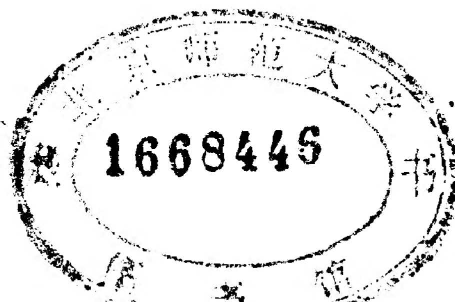
分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著



分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著



黑龙江教育出版社

1993年·哈尔滨

(黑)新登字第5号

分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著

责任编辑:韩殿发

封面设计:安振家

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里区九站街1号)

齐齐哈尔铁路印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

开本 850×1168 毫米 1/32·印张 7.625·插页 2·字数 176 千

1993 年 10 月第 1 版·1993 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—1.800

ISBN 7-5316-2044-8/O·7　定价:5.30 元

内容提要

分形几何与动力系统开创了二十世纪数学的新阶段。它们之间有着密切联系：一方面，很多分形集都来自混沌动力系统；另一方面，分形与分维又为动力系统提供了简洁的几何语言。本书系统地介绍了分形几何与混沌动力系统理论及其相互联系。全书共分七章，主要内容有：分形几何产生的背景及其思想方法；病态结构的分形性质；维数理论；分形集的分类；动力系统与分形集；多重分形理论，分形方法论及对分形发展的展望；并对递归集、胖分形、混沌与分形吸引子的几何、朱力亚集、曼德尔布罗特集、多重分形的热力学与相变等方面的最新理论进行了较详细的论述。

本书力求做到反映分形与混沌动力系统理论的概貌又不至过于高深，很多证明都略去了，是一部介于理论与应用之间的著作，可供数学及其应用的学者、有关方面的科学工作者和大专院校师生阅读。可以作为研究生教材。

序

当今世界正经历着巨大的变革，人类社会正准备迎接世纪之交，这是一个极富挑战又充满机遇的特定历史时期。

现代青年是跨世纪的一代。在新旧世纪交替的历史时期，我国青年科技工作者肩负着光荣而又艰巨的历史使命。党中央把培养造就一支强大的高水平的青年科技中坚力量提高到重要的战略高度。邓小平同志指出，经济改革，他最关心的是人才问题；科技改革，他最关心的仍然是人才问题。江泽民同志在十四大报告中指出，“科学技术是第一生产力。振兴经济首先要振兴科技。只有坚定地推进科技进步，才能在激烈的竞争中取得主动。”“在世界高科技领域中，中华民族要占有应有的位置。”可以说，世界各国的竞争，就是各国综合实力的竞争；而综合实力的竞争最核心的是经济实力的竞争；经济实力的竞争，关键又是科技的竞争，特别是高科技的竞争；而高科技的竞争归根到底，就是高层次专门人才的竞争。众所周知，青年就是希望，青年就是未来，高科技的发展需要青年。

经过四十多年的艰苦奋斗，我国科技事业已取得了较好的发展。我们已经拥有一支包括青年在内的一千多万人的科技队伍，在许多科技领域已取得了重要的成就，青年为这些成就作出了巨大的贡献。青年一代应接好班，在已有的成就基础上，奋力拚搏，创造出无愧于时代的光辉业绩。

时代呼唤科学，科学呼唤青年。青年科技人才的培养是一项巨大的复杂的社会发展工程，需要全社会的理解和支持，需要创造一个青年科学人才成长的良好的环境和风尚。黑龙江教育出版社计划推出新兴边缘学科“青年科学家丛书”，目的是为30岁左右的优秀青年科技人员登上科学殿堂架梯搭桥，提供一个出版理论学术著作的基地，这是我们培养跨世纪科技人才的一个举措，值得鼓励和赞赏。“嘤其鸣矣，求其友声。”希望这套丛书能引起广大读者的兴趣，为我国科技事业的发展做出一点贡献。

杨叔子
中国科学院学部委员
华中理工大学校长、教授、博士生导师

1993年5月16日于武汉

目 录

第一章

引论

几何学是一门源远流长，多姿多彩的学科. 在人类理性文明中，它是当之无愧的老大哥. 数千年来，无论是在思想领域的突破上，还是在科学方法论的创建上，几何学总是扮演着开路先锋的角色. 从古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何、微分几何一直到近代的黎曼几何、代数几何、复几何、辛几何、一般拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学等等无一不是这样. 直到现在，它仍然是一门方兴未艾，蓬勃发展的学科，依然保持着生机与活力. 今天，被誉为开创了二十世纪数学重要阶段的分形几何学，已发展成为科学的方法论——分形论，并被应用到各色俱备的自然科学领域及一些工程技术和社会科学领域之中，这又是一个有力的佐证.

§1　形状研究与几何学的发展

分形集由三个要素确定，第一个要素是形状. 物质世界的形体千姿百态. 几何学正是研究这些形体或“空间”的学科.

几何学是随着人们对形体认识的逐渐深化和新的研究方法的

提出而逐步发展的.在古代,人们通过对简单、基本的几何形体的观察、分析,认识到许多几何量与几何性质.世界文明古国如中国、埃及、巴比仑、玛雅等,经过实验观察与分析综合,掌握了一套可观的空间知识.例如我国古代,很早就发现了重要的勾股定理,并建立了一套简易测量的方法.这一时期的几何学可称之为实验几何学.古希腊文明继承了古埃及和巴比仑在实验几何学上的知识,进而运用逻辑推理的办法,把几何学的研究推进到高度系统化、理论化的境界.使得人类对于形的认识和理解在深度与广度上都获得蓬勃发展.这一时期的几何学即推理几何学.欧几里德所著的《几何原理》是希腊几何学一部集大成的代表作,流传至今.

以推理几何学的知识为基础,把空间的几何结构代数化(亦即数量化),从而把空间图形的研究从定性推进到定量的深度.这是笛卡尔和费马创立的解析几何学的重要贡献.由于很多数学的应用,往往要求把对事物的理解推进到有效可算的定量层面,因此解析几何学拓广了数学的应用范围,同时它也促进了分析学的蓬勃发展.

微积分为空间形体的研究提供了有力的工具.欧拉、蒙日、高斯等运用分析学研究空间中曲线和曲面的局部性质,创立了微分几何学.为了计算曲线和曲面上的几何量,如长度、角度、面积等,必须在曲面上引入测度.因有可计算性,微分几何已成为机件加工、飞机、船舶外形设计的工具.

在黎曼之前,人们总是把曲面看成欧氏空间中的形体.黎曼独具慧眼,将曲面看成独立的几何实体,从而开创了黎曼几何学。爱因斯坦正是运用黎曼几何建立了相对论.60年代以来,随着大范围分析的发展,微分算子理论、复变函数理论进入黎曼几何之中,它已成为现代数学的一个重要分支并深刻地影响着理论物理,如引力理论、高能物理和规范场等.

为了研究形体的空间位置关系和形态变化，拓扑学应运而生.并产生了一般拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学等分支.

欧氏的《几何原理》并非白璧无瑕.从其一问世到罗巴切夫斯基为止，许多几何学家都对其中的“平行公设”的“不证自明”感到不自在.一两千年间，曾有许多几何学家穷毕生之精力，力图洗刷这一“污点”.罗巴切夫斯基和鲍耶总结前人试证失败的教训，开创了非欧几何的一派——罗巴切夫斯基几何学.后面我们还将看到，许多几何学家为清除《几何原理》的瑕疵而构造的反例，正是分形几何学的先声.

19 世纪中叶以后，几何学的种类如雨后春笋般不断涌现.1872 年，克莱茵就各种新几何学的发展作出总结，指出它们结构上的一般原则.他强调变换群在古典几何学中的主导地位，将变换群作为几何分类的基础.在这种观点下，几何学被看作是图形对某种变换群为不变性质的学科.例如欧氏几何、球面几何、非欧几何中的保长变换群；圆与角的几何中的保圆保角变换群；射影几何中的射影变换群等等.一种几何结构有一个相应的自同构群，它是由所有保持结构的变换所组成的群.因为所有古典几何结构都是高度对称的、匀齐的，所以其自同构群具有统治整个图形(或全空间)的影响力，其几何性质在这个变换群下保持不变，而任何这种不变量都是几何量.因此，几何学也就被看成研究某一变换群作用之下的不变量的科学.克莱茵的思想对后世的几何学具有深远的影响，可以说，分形几何学也是在这种思想影响下诞生的.表面看来，分形几何研究的图形极不规则，杂乱无章，但在不同尺度下观察和分析，可以发现它们在尺度上的对称性.对其定义一个标度变换群，分形集是这个变换群的不变集，而分维就是这个变换群作用下的不变量.

§2 机遇与自然界的几何形态

机遇(或随机性)是分形集的第二个要素,自然界的几何形态与随机性有关.

传统几何的空间结构具有高度对称性和匀齐性.直观地说,这些几何学研究的图形是相当规则和光滑的.如直线、圆、椭圆、平面、球面、光滑微分流形等.它们只是某些自然形态的简化和近似.虽然如此,它们在某些研究中仍是不可缺少的.例如,圆和抛物线可作为某些微分方程的解曲线,对这些曲线几何性质的认识可帮助理解相应的微分方程.又如,行星运动的轨道并非严格的椭圆,地球也不是真正的圆球,但在预测行星的运动,或研究地球的引力场时,用椭圆和球来近似,效果也是够理想的.然而,自然界的真实形态是千变万化,复杂纷繁的.难怪弗里曼·戴桑诙谐地说:

"自然界给数学家们开了个玩笑.19世纪的数学家可能缺乏想象力,而自然界却不乏想象力……"

起伏不平的地形地貌;大地褶皱、断层、裂缝;曲曲弯弯的海岸线;流体的湍流;相变点附近的涨落花斑;地下水和石油的渗流;结晶体或河流的分支;静电传输误差;股票市场的波动…….根据研究问题的需要,用规则的几何形态近似这些复杂形态达不到目的,甚至有很多形态连一级近似也做不出来.对自然界中的这些复杂形状和结构,传统的几何学显得苍白无力.应运而生的分形几何学为研究这些极其复杂、极不规则的形态提供了一个总体框架.

分形几何学研究的图形是分形集,它是区别于规则集合的奇异集,如康托集等等.一般的分形集有哪些特征呢?分形几何学创始人曼德尔布罗特(B. B. Mandelbrot)指出,一个分形集由三个要素确定,即:形状、机遇和维数.人们可以毫不困难地区分一座山和一朵云,因为它们具有不同的形.尽管一个岛屿的海岸线和科契

(H. Von Koch)曲线有近似的结构和维数，人们仍然能够分辨它们. 这种差异的产生是由于海岸线受到自然界随机因素的作用而显现出相当紊乱的形貌. 相比之下，人们感到一道闪电远比一条折线复杂. 这种复杂意味着什么？如何刻画这种复杂性？分形集的维数回答了这一问题.

§3 图形的维数

维数是图形最基本的不变量. 也是刻画分形集的要素之一. 例如自然界中的分形集的维数应是标度变换群作用下的不变量. 历史上，对图形维数的定义经历了漫长的探索. 早在两千多年前，欧几里德就给出图形维数的描述："曲面有两个量度，曲线有一个量度，点连一个量度也没有."这里的量度即欧氏维数. 后来将其定义为描述空间中一个点的位置所需要的独立坐标数目或连续参数的最小数目. 例如，曲线可用下述映射定义. $\mathbf{r}:[a,b]\longrightarrow \mathscr{R}^3$

$$\mathbf{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{1.1}$$

只需一个连续参数 t. 曲面也可用如下映射定义，$\mathbf{r}:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow \mathscr{R}^3$

$$\mathbf{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}\quad a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant d \tag{1.2}$$

只需两个连续参数 u,v. 直观长期地迷惑了我们. 直到上世纪末，意大利数学家皮亚诺作出了一个初看起来甚至以为是悖论的惊人发现. 他指出，存在定义于实数轴上闭区间的连续映射，将区间映满平面上的二维区域，比如正方形或三角形. 这样的映射称作皮亚诺曲线或充满空间的曲线. 我们将在第二章给出其构造和详细分析. 当然这一曲线已经不是简单规则的曲线了，现在知道它是一条分形曲线.

皮亚诺的例子告诫人们，定义空间的维数时必须十分小心. 把集合 X 的维数定义为确定 X 各点所需连续参数的最少个数并不妥当. 因为照这样定义，皮亚诺的例子说明正方形区域或三角形区域将是一维的！

于是，人们提出：图形的维数到底是什么？本世纪初，阐明这个概念的意义并创立维数理论的是苏联数学家乌雷松. 其定义如下：

称图形 X 是零维的，如果在其中不存在包含多于一个点的连通图形. 归纳地，若已经确定 n－1 维和更低维的图形，则 n 维图形就定义为：它不是 n－1 维或更低维的，且可以用 n－1 维（或更低维）的图形把其中任意点及其邻近点同图形的其余部分分割开.

乌雷松定义的维数是拓扑不变量，即在拓扑变换之下保持不变. 但是空间再抽象一些，如拓扑空间，其拓扑维数的定义并非易事. 即使是特殊的紧致豪斯道夫空间，维数的定义也是抽象难懂的，我们不拟深入介绍.

乌雷松定义的维数只取整数，它可以解决关于皮亚诺曲线维数的疑难. 由于用点不能将皮亚诺曲线上任一点及其邻近点和其它部分分开，因此其维数为 2. 但是拓扑维数也没有对集合整体的复杂程度或集合占有空间的规模给出很好的描述. 想想看，在圆锥曲线和皮亚诺曲线之间，还有许许多多的曲线，它们的复杂程度很不一样，占有空间的规模也大不相同，只要没有填充一个邻域，按乌雷松的定义，它们的维数都为 1. 科契曲线和谢尔品斯基地毯就是这样的例子. 为了刻画曲线占有空间的规模，其维数应该扩展到 1 与 2 之间的实数. 类似地，为了刻画离散点集占有空间的规模，维数应扩充到 0 与 1 之间的实数. 为了刻画不同曲面占有空间的规模维数应扩展到 2 与 3 之间的实数等等. 维数跳出整数的圈子，就产生了分形几何学. 人们从不同角度定义的维数，已有相似维数、豪斯道夫维数、盒维数、容量维数、布利干维数、信息维数、关联

维数乃至广义维数的连续谱等等.

实际上,分数维并不是近年才提出的新概念. 早在 1919 年,在波恩工作的大数学家豪斯道夫就提出了维数应该可以取分数的思想,并创立了豪斯道夫测度和维数. 以后的贝塞考维奇也曾致力于这一工作. 但由于历史的局限,他们的创造性工作没有引起更多人的重视.

迟至 70 年代中期. 分数维的概念才逐渐传播开来,80 年代形成了席卷全球的"分形热潮". 如今,它已渗透到数学、物理、化学、生物、医学、地质、地震、冶金、材料、工程、经济等领域. 它不仅引出了许许多多的新问题,还为解决古老的难题带来了新的希望. 湍流与相变就是两个著名的例子. 相变点附近的涨落花斑,发达湍流中的高旋涡区域,都是分形的物理实例. 它们都在大、中、小、微许许多多尺度上表现出紊乱状态,这正是从理论上描述它们的困难所在,也是借助分形理论中的标度对称性解决问题的希望所在. 在无标度区内求出的重要特征量分维,浓缩了它们在几何形态上的很多重要信息.

目前人们对分形与分维表现出如此强烈的爱好,其主要原因有三条. 第一,传统的数学研究方法与计算机图形学相结合,协助人们推开了分形这座艺术宫殿的大门,这座具有无穷层次结构的迷宫,使成千上万的科学家和艺术家留连忘返. 第二,物理学家和许多其它领域的科学家起了推波助澜的作用. 在他们手中,分形和自然界里的真实事物产生了不解之缘. 他们越来越惊奇地发现,自然界里到处是分形. 湍流、相变、银河系中的星团、流体在孔隙介质中的渗流,给出令人眼花缭乱的分形图象. 他们用分形模型描述自然界的复杂现象,在无标度区里计算实际系统的分维. 从传统的理论中呼唤出合理的内核,并力图与新的维数结合,给复杂的现实以新的解释. 第三,富有传奇色彩的多面手,年轻的法国数学家曼

德尔布罗特(B·B·Mandelbrot)以其坚韧不拔的毅力和大无畏的精神.为分形几何的诞生立下了不朽功勋,并对分形几何的广泛应用起了持续推动的作用.

§4 分形几何的产生与曼德尔布罗特的业绩

1960年,曼德尔布罗特从棉花价格数据随时间变化的曲线上,看到了在他脑海中逐渐形成的一幅现实世界的图画.Mandelbrot对这些数据进行计算机处理,发现了所寻求的惊人结果.从正态分布角度产生偏差的数字,从尺度变换的角度却给出了对称.价格的每一次特定的变化是随机的、不可预测的,但长期的变化又是与尺度无关的.价格的日变化和月变化曲线完全一致.甚至在经历两次世界大战和一次大萧条的60年动荡岁月中,价格变动的程度保持不变.大量无序的数据里竟然存在着一种出乎意料的有序.它使Mandelbrot日益增强了探索尺度现象的决心.

这以后不久,庇护他的IBM公司正非常关心一个实际问题.工程师们被计算机之间通讯用的电话线中的噪声问题弄得不知所措.工程师们发现,某种自发噪声怎么也无法消除,它偶尔会抹掉一部分信号,造成误差.Mandelbrot通过与工程师们交谈,得知了传输噪声在本质上是随机的,但以聚群出现时情况就不同了.越仔细观察这些聚群,误差的模式看来就越复杂.Mandelbrot采取了一层一层地深入区分无误差传输和误差传输期间的描述方式.他论证说,与直觉相反,根本不可能找到一段时间,其中误差是连续散布的.在任何一群误差中,不论时间如何短,总会存在几段完全无误差的传输.更令人吃惊的是,他发现了误差聚群与无误差传输段之间一致的几何关系.无论是在小时还是在秒的尺度上,无误差期间与有误差期间之比总是常数.工程师们没有现成的框框来理

解他的描述，但数学家们是有的. 早在 1875 年，康托(Cantor)就准备了这一模式——三分 Cantor 集.

这一描述使工程师们改变了处理噪声的战略，不应靠加强信号来淹没越来越多的噪声，而应当采用适当的信号，容忍不可避免的误差，并采用多余信息的战略来发现和改进误差. Mandelbrot 的尺度变换模式表明，永远不可能在特殊局部事件的基础上把噪声解释清楚.

Mandelbrot 转向河流水位的数据. 同处理棉价数据一样，他把水位变化分为诺亚效应和约瑟效应.

诺亚效应意味着不连续. 经济学家们过去设想价格平稳变化，然而这是错误的. 价格可以在瞬间跃变，就象一则消息经电传机发来，成千的经纪人就立刻改变主意一样. Mandelbrot 论证说，如果一种股市战略假定股票售价从 60 美元降到 10 美元时一定要经过 50 美元的售价，那就注定要失败.

约瑟效应意味着持续性. 洪水和干旱的确是持续的，尽管有潜在的随机性，但一块地方受旱灾越久，它就越可能受灾. Mandelbrot 将普通 Brown 运动这一随机过程拓展到与分形有关的分数 Brown 运动，并融合 Hurst 指数对尼罗河水位的分析表明，无论按一百年计还是按十年计，这种持续性都有所显现.

不连续性、阵发噪声和 Cantor 尘集，在传统的数学中被看成病态的个别现象，因而只作为反例. 经典几何学和赖以为基础的传统数学研究的是规则的和光滑的对象. 它们代表着对现实世界简单形体的有力抽象. 但对于认识复杂形态，它们却是一种错误抽象.

Mandelbrot 喜欢说，云彩不是球面，山峰不是圆锥，闪电并不按直线前进. 他脑海中的现实世界的图象粗糙而不光滑、凹凸而不圆润. 他提倡的自然界的几何学是斑痕、麻点、破碎、扭曲、缠绕、纠

结的几何学. 他认为凹凸和缠绕比瑕疵更严重地歪曲了欧氏几何中的规则形状,这常常是理解事物本质的关键.

对于“不列颠的海岸线有多长?”这一问题的深入思考和分析,成为 Mandelbrot 思想的转折点. 他论证说,任何海岸线在一定意义上都是无限长的. 而在另一种意义上,结果依赖于测量海岸线所用直尺的长度. 尺子长度越小,测得的长度越大. 因为海湾与半岛将显露出越来越小的子海湾与子半岛. 测量尺度无限变小,则海岸线长度无限上升. 描述光滑曲线长度的数学模型无法用来描述英国海岸线,而数学家科契(H. Von. Koch)在 1904 年构造的“妖魔”曲线却能恰如其分地描述海岸线. 这里,尺度对称性又一次起了重要作用. 分维在尺度变换下保持不变. 而且分维刻画了海岸线的整体复杂性和粗糙度.

Mandelbrot 发现欧氏测度不能抓住不规则形状的本质,从而转向尺度对称性和尺度变换下的不变量——维数的研究. 他总结出自然界的很多现象的自相似性,即跨越不同尺度的对称性. 棉价、电子传输噪声、尼罗河水位、不列颠海岸线. 地震行为的物理学在相当大的程度上与尺度无关,大地震只是小地震按尺度放大的结果. 云彩是和地震一样可以有尺度变换的现象. 在不同的尺度下观察,它们所特有的不规则性(或分维)不变. 卫星云图的分析表明,从几百英里高空观察的云彩具有不变的分维.

血管分支再分支的性质是一种分形. 就体内“资源”而言,血液是昂贵的,空间也必须珍惜,作为生理需要,循环系统就必须象谢尔品斯基(Sierpinski)海绵那样,把巨大的表面积挤进有限的体积. 在多数组织中,永远没有一个细胞与血管的距离超过 3—4 个细胞之远,但血管和血液只占用了不超过人体 5%的空间. 血管系统具有奇异吸引子的特征. 体内充满了这种复杂性. 消化道里,组织表现出波纹夹着波纹,肺脏也是这样,它力图把最大可能的表面

积装进最小的空间.典型的人肺表面展开之后比网球场还大.

在Mandelbrot发表他关于生理学的推测之后10年，一些理论生物学家开始发现分形组织控制着贯穿全身的结构.支气管分支的标准的“指数式”描述被证明是十分错误的，而分形描述与数据相符.泌尿系统也是分形系统.肝脏里的胆管也是.心脏中输送电流脉冲到收缩肌肉的特殊纤维的网络也是这样.好几位具有混沌思想的心脏学家发现，心跳节律的频率谱遵从分形规律.这是一组分支通道的迷宫，在越来越小的尺度上具有自相似的组织.

Mandelbrot认为，只有在传统的欧氏几何意义下现实世界才存在复杂性.作为分形，分支结构可以近乎透明地简单描述.只需要几位数字的二进制信息就够了.在有机体遗传基因的编码指令中有类似于Koch，Peano和Sierpinski所设计的形状.DNA可以规定重复的分岔和发展过程.Mandelbrot认为自然界的树也需要用分形的枝叶来获取阳光和抵抗风力.理论生物学家们开始推测，在形态发生过程中，分形尺度不仅是常见的，而且是普遍的.

1975年，Mandelbrot把关于大自然和数学史的探索汇集成一书，出版了《分形图：形状、机遇和维数》.这标志着分形几何学的诞生.他也因此获得了前所未有的学术成就和殊荣.他的名字出现在科学史家科恩经过严格挑选的短短名单上.

Mandelbrot发现，他的最热情的接受者是那些在石油、岩石或金属方面工作的应用科学家.80年代中期，在庞大的埃克森研究中心有大量科学家钻研分形问题.在通用电气公司，分形成为聚合物研究中的组织原则；还有核反应堆的安全问题中也是如此.在好莱坞，分形在产生电影特殊效果方面大显身手，用于创造地上或天外非凡的“实景”.

May和Yorke等人在70年代初期开始研究非线性动力系统的混沌行为.而理解非线性动力学的关键结构是分形.在应用方

面，分形几何也为物理学家、化学家、地学家、冶金学家、生理学家提供了工具.人们认为，Mandelbrot 的分形几何就是大自然本身的几何.

1982 年，Mandelbrot 出版《自然界的分形几何》这一著作之后，分形这个概念便在全世界不径而走，迅速深入很多科学领域，把许多人带进了分形的百花园.

Mandelbrot 不仅提供了自然界中许许多多的分形图象，还为混沌提供了必需的语言.分形几何学为描述复杂现象和探索物质世界的复杂机制提供了简洁的工具.它被誉为开创了二十世纪数学的重要阶段，Mandelbrot 也因此而获得了 1985 年度的 Barnard 奖章.

第二章

“病态”结构及其分形性质

19 世纪的数学家凭借想象创造出来的不够光滑、不够规则的集合和函数，曾被视为“病态”结构，不值得研究而不予理采．长期以来，除极少数被认为可以利用一般理论进行研究的以外，大部分“病态”结构只在分析和拓扑学教科书中担当着反例的角色，起着对正则结构的点缀和陪衬作用．近年来，这些“病态”结构采取分形的形式而受到人们的重视．在分形几何理论中的主要角色都是由分析和拓扑中的病态曲线和其他“怪物”，如 Cantor 集、Weierstrass 函数、充满空间的曲线、雪片曲线、Sierpinski 地毯等等所扮演的．使科学家们惊讶并受欢迎的是，这些东西有比被人们举出来仅仅作为反例更为重要的意义．事实上，为了描述自然界的几何形状，它们是必需的．正如 Mandelbrot 所说：“我不想声称这些集合如此美妙以致一定会派上用场．我只是想要人们承认，正是使 Cantor 不连续统是病态的那些性质到头来却是间歇现象的现实模型中必不可少的东西．”

本章我们介绍这些来自分析学与拓扑学中的反例，分析它们的性质并由此引出分形几何的基本思想和主要问题．

§1 康托集及其性质

1875 年，集合论创始人，德国数学家康托(G. Cantor)构造出一个奇异集合，称作三分康托集，其构造如图 2.1 所示. 从单位区间 E_0 出发，去掉中间的 1/3，得到的集记作 E_1，它包含两个子区间 [0,1/3]和[2/3,1]. 接着去掉 E_1 两个子区间各自中间的一段得到 E_2. 设已作成 E_k，它由 2^k 个长度为 3^{-k}的小区间组成，从每个小区间去掉中间的 1/3 得到 E_{k+1}. 作为点集，显然 $E_{k+1}\subset E_k$，其极限集 $F=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$ 就是三分康托集. 它由[0,1]中可以展成以 3 为底的幂级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i3^{-i}$形式的数组成，$a_i=0$ 或 2，即 a_i 不取 1. 这是由于从 E_k 得 E_{k+1} 时，去掉了 $a_i=1$ 的那些数.

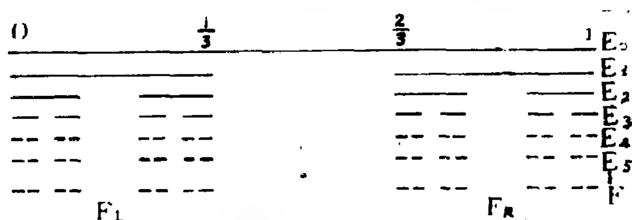


图 2.1　三分康托集 F 的构造

集 F 具有下述分析和拓扑学性质，传统数学认为这些性质对非连续统是“病态”或“奇怪”的.

Ⅰ）　F 是不可列无穷集，即它与连续统有相同的基数. 在 F 的每一点的邻域内都包含了 F 的无穷个点. 这又说明 F 的每一点都是 F 的聚点，即 F 没有孤立点. 因此又有性质

Ⅱ）　F 是自密集或说自稠密的. 但是

Ⅲ）　F 在[0,1]中不稠密. 事实上 $\bar{F}=F\neq[0,1]$这说明 F 是闭集且 $F\subset[0,1]$是有界的，因此有

Ⅳ）　F 是紧致的，同时知 F 是完全集. 但

Ⅴ）　F 是完全不连通的.

集 F 还具有如下典型的几何性质. 它代表了很多分形集所具有的几何特征.

G_1） F 是自相似的. 即 F 的每一个充分小的局部都与 F 是几何相似的. E_1 的两个区间内 F 的部分与 F 相似，相似比为 1/3，将其放大 3 倍就得到 F；E_2 的每个小区间内 F 的部分与 F 也相似，相似比为 1/9，将每一部分放大 9 倍亦得到 F……. 因此，F 中包含了无穷多个不同比例的与 F 相似的样本.

G_2） F 有"精细结构"，即它包含有任意小比例的细节，用越来越大的倍数观察 F，间隙就越来越清楚.

G_3） F 的定义简单明了，是一个简单图形（单位直线段 E_0）通过迭代过程产生的，即不断地重复去掉中间 1/3 而得到. 迭代的步骤越大，E_k 越逼近 F.

G_4） F 的几何性质难以用传统的术语描述，它既不是满足某些简单条件的点的轨迹，也不是任何简单方程的解集.

G_5） F 的局部性质也是很难用传统数学语言描述的. 在它的每点附近都有大量被各种不同间隙分开的其它点.

G_6） F 虽是不可数无穷集，但其勒贝格测度为 0. 事实上，E_k 的长度为 $2^k \cdot 3^{-k}=(2/3)^k$，当 $k\to\infty$ 时，F 的长度为 0. 因此，勒贝格测度不能对 F 给出很好的描述，图形的拓扑维数 0 和 1 也不能给 F 以很好的描述. 因为按拓扑维数的定义，$D_T(F)=0$. 但 F 的初次构造中的两个特征量：相似比 1/3 和与原图形相似的新图形的个数 2，可构成新的特征量 $D_s=D_H=\log2/\log3$，即相似维数或 Hausdorff 维数，虽是非整数，但却对集合 F 的复杂程度和占据空间的规模给出了较好的描述，使 F 既能区别于可列点集又能区别于区间[0，1].

§2 科契曲线与海岸线

1904 年，瑞典数学家科契(H. Von Koch)设计出一类被称之为"妖魔曲线"的"病态"结构. 图 2.2 所示为其中之一. 设 E_0 为一单位直线段，将其等分为三段，中间的 1/3 用边长 1/3 的等边三解形向上指的另两条边代替得到的集记为 E_1. 它包含四条线段. 对 E_1 的每条线段重复这一手续得到 E_2. 归纳地，E_{k+1}是把 E_k 的每条线段中间的 1/3 用边长为 $1/3^{k+1}$的等边三角形的另两条边代替得到的. 当 k 充分大时，E_{k+1} 与 E_k 只在精细的细节上不同. 当 $k\to\infty$时，极限曲线 $F=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$ 称为科契曲线.

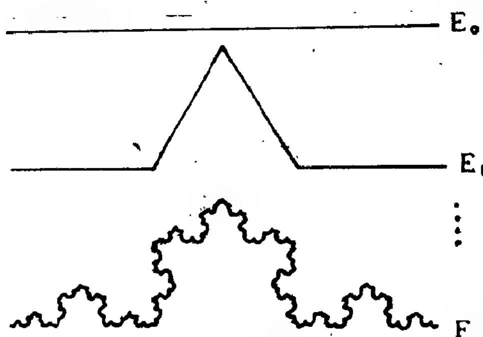


图 2.2 Koch 曲线. 上为初始直线段，中为第一次构造，下为极限图形

科契曲线有与三分康托集类似的几何性质. 它由 4 个与总体相似的部分组成，相似比为 1/3. 它在任何尺度下的不规则性反映了它的精细结构. 这一曲线在传统意义下，处处是尖点，没有一处有切线. 易知，E_k 的长度为 $4^k\cdot 3^{-k}=(4/3)^k$，令 $k\to\infty$，知 F 的长度为无穷. 但 F 在平面内的面积为 0，所以长度和面积都没有对 F 提供好的描述. 这一点根源于整数的拓扑维数 1 和 2 没有为 F 提供好的描述. 按拓扑维数的乌雷松定义，$D_T(F)=1$，而用 F 构造中的特征量 1/3 和 4 决定的分数维数 $D_S=D_H=\log4/\log3$，则对 F 的复杂程度和占据空间的规模提供了较好的描述.

将 E_0 换成单位长度的等边三角形，对每边都按图 2.2 的方法

构造，得到科契雪花曲线，如图 2.3 所示. 这条闭曲线长度为无穷，但围成的面积有限，它小于正三角形外接圆的面积.

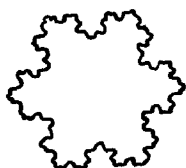
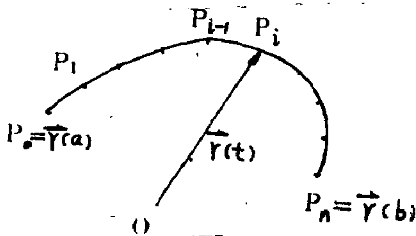


图 2.3 Koch 雪花曲线

Mandelbrot 把生成科契曲线的递归方法一般化. 给定一个源多边形(如直线段、三角形)；一个生成元，它由若干线段组成，其中有两个点为特定点. 在每一次迭代中，将上一次迭代图的每一直线段换成生成元的相似像. 生成元中两个特定点的象就是这一直线段的端点. 实际上这是相似几何变换的迭代，极限图形就是这一变换的不变集. 按照这种方法可以生成各种各样的分形曲线，它们都有类似于科契曲线的性质，如方形科契岛边界线、十字形科契岛边界线等等.

十分巧合的是，科契曲线可作为描述英国海岸线的模型. 实际上，若对科契曲线作一些随机化处理，则它与英国海岸线十分相似. 当人们从不同的高度观察海岸线时，看到的形状大致相同. 虽然高度越低，看到的范围越窄，细节越多，但从不同高度观察和拍摄到的照片，发现海岸线有相似的曲折性和复杂程度，具有与科契曲线类似的形状和精细结构. 这一性质造成了海岸线长度精确测量的困难. Mandelbrot 在 1967 年发表的关于海岸线的文章中，得出英国海岸线长度不确定这一结论使人十分惊讶. 在他 1975 年出版的《分形图：形状、机遇和维数》一书中，第二章题为“不列颠的海岸线有多长?”又考虑了测量海岸线长度的问题. 实际上，海岸线的长度是随测量尺度变化的. 当人们从不同高度测量海岸线时，测量尺度(单位)随之变化. 如果以公里作单位，那么海岸线上几米至几百米的一些弯曲被忽略. 设这时测得的长度为 L_1. 如果用米作单位，那么较小的弯曲虽然可以测出来，但更小的弯曲仍被忽略. 设这时测得的长度为 L_2，则必有 $L_2>L_1$. 若以毫米为单位，则几乎所有肉眼能看出的弯曲都不会忽略，这时测得的长 L_3 必大于 L_1 和

L_2. 如果考虑一个极端情况，以原子尺寸为测量单位，这就很近似数学上对光滑曲线 C 的求长公式了. 如图 2.4，光滑曲线 C 的弧长



$$L(C)=\int_a^b ds=\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt$$

$$=\lim_{\max\{r_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (2.1)$$

图 2.4 光滑曲线弧长公式示意图

式中，$r_i=|\overrightarrow{p_{i-1}p_i}|$. 由于海岸线象科契曲线一样，不是光滑曲线，按(2.1)式求出的长度必大至天文数字(无穷大). 这说明，在欧氏意义下，海岸线的精确长度是不定的，只能给出一定参照尺度下的近似长度. 但是，不列颠海岸线有近似于科契曲线的维数 D_f，而 D_f 是尺度变换下的不变量. 它说明，海岸线虽然复杂曲折，表面看来毫无规律，但它却在大小不同的尺度上表现出对称性.

下一章我们将给出科契曲线在 Haundorff 度量意义下的长度. 在这一意义下，不列颠海岸线也是可求长的，这与按(2.1)式海岸线不可求长形成鲜明的对比.

§3 谢尔品斯基集合

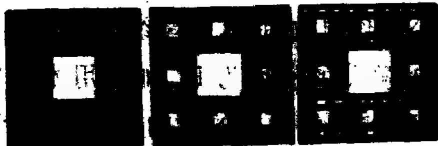


图 2.5 Sierpinski 地毯的构造

波兰数学家谢尔品斯基(W. Sierpinski)1915 年给出从平面上的二维图形出发作曲线的有趣例子. 如图 2.5 所示. 把一个单位正方形 D_0 划分成 9 个相等的小正方形并挖去中间一个得到 D_1，把 D_1 的每

个小正方形再分成 9 个小正方形并挖去中间的一个得 D_2. 重复这一过程至无穷，极限图形 F 为一曲线，称作谢尔品斯基地毯.

将上述构造中的正方形改成三角形，在每步构造中都将前次的正三角形等分成四个小正三角形并去掉中间的一个. 这一构造过程的极限图形是一曲线，称作谢尔品斯基垫. 如图 2.6.

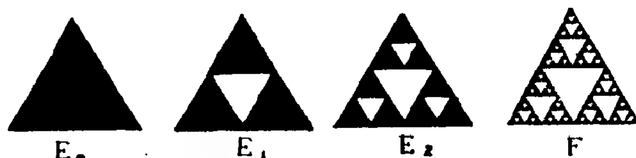


图 2.6　Sierpinski 垫的构造

这两种曲线有着和 Cantor 集、Koch 曲线类似的性质. 地毯的分维 $D_s=D_H=\log 8/\log 3$，垫的维数 $D_s=D_H=\log 3/\log 2$.

谢尔品斯基垫还显示出一种重复的分叉和发展过程，它的每一点都是一个分叉点. 在拓扑学中，对谢尔品斯基地毯的性质曾有过较深入的研究，比如平面曲线和地毯的关系. 若能嵌入平面内的曲线也能嵌入地毯内，则称为万有平面曲线. 人们证明不能嵌入平面内的曲线也不能嵌入地毯内. 从空间中的单位立方体出发，与地毯构造方法类似可得到 $\mathscr{R}^3$ 中的谢尔品斯基海绵，如图 2.7 所示. 奥地利数学家孟格尔证明，任何曲线都能嵌入谢尔品斯基海绵.

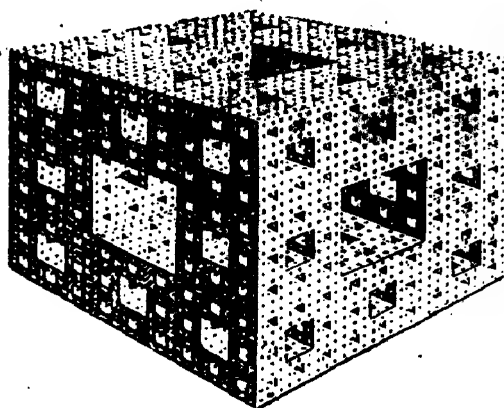


图 2.7　Sierpinski 海绵

应用谢尔品斯基的方法可以构造许多分形集.在每次构造中把一个正方形等分成16个小正方形,保留其中4个而把其余去掉,得到平面上的一个康托尘.如图2.8所示.(如果保留不同次序或不同个数的正方形则构造出不同的集).其维数 $D_s = D_H = 1$.应用相同的方法但使用两个不同的相似比,可以构造出类似于雪花的分形集,如图2.9所示.这里的康托尘和雪花也有类似于康托三分集和科契曲线的性质.

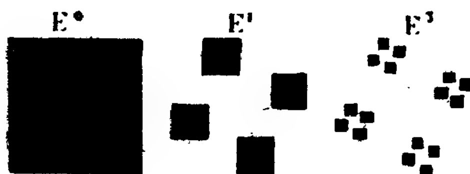


图 2.8 Cantor 尘的构造(初始图形和前两步构造)

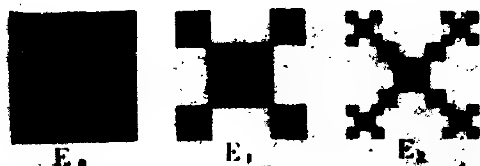


图 2.9 具有两个不同相似比的分形集

(初始图形和前两步构造)

§4 维尔斯特拉斯函数

这是分析学中的一个著名反例.原来人们总以为连续函数只在个别点处不可微.但德国数学家维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)这位分析学大师在1875年发现了处处连续但不可微的函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)\quad(0<a<1,ab>1+\frac{3}{2}\pi,b\text{ 是奇数})\tag{2.2}$$

它的发表曾使数学界为之震惊.

现在维尔斯特拉斯函数已有许多变形，比如

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n/2}\sin[(3/2)^n x] \tag{2.3}$$

最著名的是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)n}\sin(\lambda^n x) \quad 1<s<2,\lambda>1 \tag{2.4}$$

Mandelbrot 提出的变形为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda^{(s-2)n}(1-\cos\lambda^n x) \quad 1<s<2,\lambda>1 \tag{2.5}$$

它满足

$$f(\lambda x)=\lambda^{2-s}f(x)$$

令 $\Gamma=\{(x,f(x))\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 表示 Weierstrass 函数的图像，则(2.3)式的曲线 Γ 如图 2.10 所示. 由于无穷项求和导致了函数具有精细结构，而且处处不存在切线，因此，它不能象光滑的曲线那样，可以用经典的微积分来研究. 它也不象前三节那些分形集，局部与整体是严格相似的. 但是它有一种自仿射性，即纵横两个方向具有不同的标度特性. 正因为如此，Weierstrass 曲线维数的研究比 §1—§3 中的分形集更困难. 对于(2.4)式，$D_H(\Gamma)\leqslant s$，而等号的严格证明至今尚未见到. 对(2.5)式 $D_H(\Gamma)=s$.

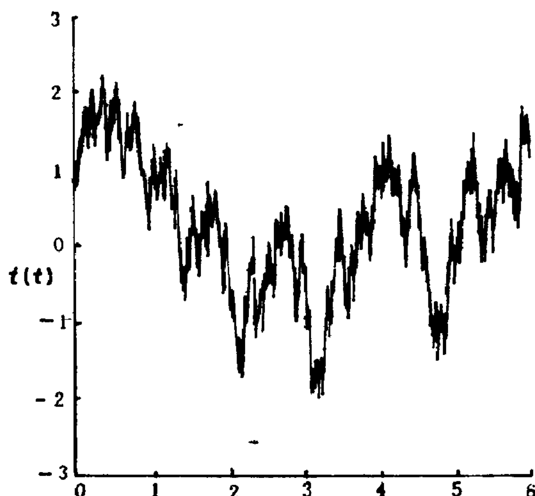


图 2.10 (2.3)式的图 Γ

如今，(2.5)式已推广到更一般的形式

$$W(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{(s-2)n}[1-\exp(i\lambda^n t)]\exp(i\varphi_n) \tag{2.6}$$

式中 $\lambda>1, 1<s<2, \varphi_n$ 任意. 这一函数的标度性质和功率谱特性已应用于海底地形剖面线的研究. (2.6)称为 Weierstrass－Mandelbrot 函数(简称 W. M 函数). W. M 函数已由 Ausloos 和 Berman 推广到多变元

$$W(r)=[(\ln\lambda)^{1/2}M^{1/2}]\sum_{m=1}^{M}A_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1-\exp(ik_0\lambda^n r\cos(\theta-\alpha_m))]\exp(i\varphi_{m,n})(k_0\lambda^n)^{s-3} \tag{2.7}$$

式中 r 为向量, k_0 是波数, A_m 是振幅, $\varphi_{m,n}$ 是位相, α_m 是曲面的褶皱方向角. 选取适当的参数如 λ, M, s 等, W(r)的图象为分形曲面, 且可模拟起伏不平的地表. W(r)的图的维数 $D_H=s, 2<s<3$.

还有其它类型的连续而不可微的函数. 比如把(2.4)式中的 sinx 换成如下定义的分段函数

$$g(4k+x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1 \\ 2-x & 1\leqslant x<3 \\ x-4 & 3\leqslant x<4 \end{cases}$$

所得函数仍是连续但处处不可微的. 连续但无处可微的函数还有 de Rham 函数.

§5 填充空间的曲线

1890 年, 意大利数学家皮亚诺(G. Peano)作出了一个初看起来甚至以为是悖论的惊人发现. 他指出, 存在定义于实数轴上闭区间的连续函数将区间映满平面上的二维区域, 如正方形或三角形. 这类映射的图形称为 Peano 曲线.

Peano 曲线有多种变体. 我们这里介绍较简单的一个，它以正三角形为象. 这条充满空间的曲线是一系列较简单曲线的极限. 愈是沿着这个序列前进，序列里的曲线将三角形填上的部分就愈大.

设△表示平面上边长为二分之一的正三角形. 按下述方式构造出一序列连续映射，$f_n:[0,1]\to\triangle$. 前三次映射如图 2.11 所示. 以后各项可通过迭代的步骤而得到.

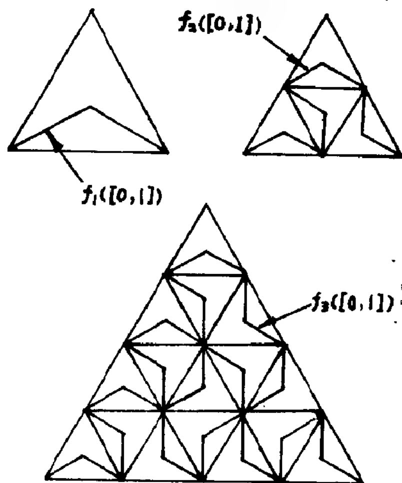


图 2.11 Peano 曲线构造的前三步

在每一步，△被分成一些全等的小三角形. 曲线在这每个三角形内的部分都恰如 f_1 的像，即通过三角形重心连结三角形顶点的一条折线. 在向下一步过渡时，每个小三角形又被等分成 4 个更小的三角形，并引入像 f_2 的像那样更复杂一些的曲线. 如此继续不断地将正三角形分小，f_n 的像就逐步扩大了△内被填上的部分.

对于 $\mathscr{R}^2$ 内的两点 x 、y ，d(x ，y)表示它们间的欧氏距离. 设 $n\geqslant m$，则对 $t\in[0,1]$，可以找到边长小于 $1/2^m$ 的一个三角形同时含有 $f_m(t)$ 与 $f_n(t)$，因此 $d(f_m(t),f_n(t))\leqslant 1/2^m$ 对 $\forall\, t\in[0,1]$ 成立. 这说明函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛. 令极限映射为 $f:[0,1]\to\triangle$，由于 $\forall\, n, f_n$ 连续，故 f 连续.

下面证 $f([0,1])=\triangle$. 由于对 $\forall\, n, f_n$ 的像到△内任何点的距离不超过 $1/2^n$. 设 $x\in\triangle$，x 在 $\mathscr{R}^2$ 内的邻域为 U，取 N 足够大，使

得以 x 为中心，$1/2^{N-1}$为半径的圆含于 U，并且取 $t_0 \in [0,1]$，使得 $d(x, f_N(t_0)) \leqslant 1/2^N$. 因为$\forall\ t \in [0,1]$有，$d(f_N(t), f(t)) \leqslant 1/2^N$，应用三角不等式得到 $d(x, f(t_0)) \leqslant 1/2^{N-1}$. 这说明 $f(t_0) \in \triangle$，即$\triangle$的每一点是集合 $f([0,1])$的极限点. 由拓扑学知，闭集的连续像是闭集，即 $f([0,1])$是 $\mathscr{R}^2$ 的闭集，因此必包含它所有的极限点. 这就是说 f 的像为整个$\triangle$.

从曲线的构造过程可以看出，Peano 曲线具有与 Cantor 集的几何性质 G_2)—G_5)类似的性质(见第 15 页)但它不具有 G_1). 易见它具有一定相似性，但不是严格自相似的. 此外，G_6)也不成立. Peano 曲线有非空的内部，其勒贝格测度为非零有限值，这样其 $D_H = D_T = 2$.

除 Peano 曲线外，还有很多其它填充平面区域的曲线. 如 Heighway 龙，它填充一个平面区域且有分形边界；Hilbert 曲线和 Gosper 曲线，它们填充平面上的一个正方形区域. 这些集，我们将在第四章介绍，在那里我们还可以看到其它一些填充平面区域的曲线.

§6 有面积的康托尘与康托曲线

在第一章，我们说过欧几里德《几何原理》的美中不足. Peano 的反例正是基于对欧氏关于维数(量度)的推敲而得出的. 它告诫我们，定义空间的维数时应十分小心.

欧几里德还定义曲线为“有长无宽”. 这当然不是曲线的定义，而只是曲线的直观描述. 下述康托曲线的例子说明这个描述不是良好的.

先构造一个有面积的康托尘. 如图 2.12 所示(见下页)，取单位正方形 A_0，从 A_0 割去一个十字形，十字形的宽度取得使十字形

的面积等于 1/4，留下的图形记作 A_1. 从 A_1 的每个小正方形中再割去十字形，使割去的十字形面积之和为 1/8，留下的 16 个小正方形记为 A_2. 从 A_2 的每个小正方形中再割去十字形，使割去的面积之和等于 1/16，等等. 设 A_n 表示经过第 n 步手续后留下的图形，第 n 步割去的十字形面积之和为 $1/2^{n+1}$. 设 A 表示极限图形，因 $A_n \subset A_{n+1}$，故 $A=\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. 因为留下的正方形越来越小，故图形 A 由离散的点组成. 即 A 是康托尘集. 最近我们详细地研究了这一尘集，它有三分康托集的性质 $G_2)-G_5)$（见第 15 页），从表面看，它是严格自相似的. 但实际上，它没有不变的相似比，即 G_1）不成立. 但它具有拟自相似性（见第五章 § 7). 另外对应于 G_6）的性质也不成立，因为 A 有正的勒贝格测度（面积). 事实上，A 的面积

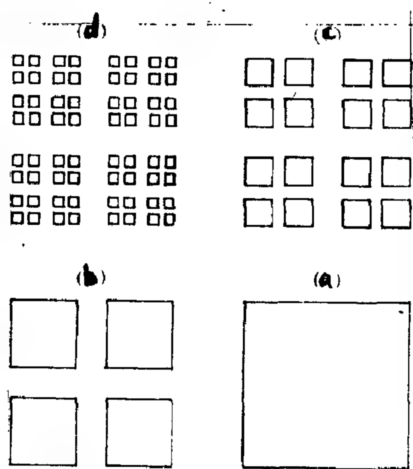


图 2.12　有面积的 Cantor 尘，构造的前三步

$$\mu(A)=1-\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n+1}=1/2$$

为区别于前几节的分形集，A 称作胖分形. 最近，我们将 A 的构造扩充成平面上的一类集合 $A(k,\sigma)$，随参数 k,σ 的变化，$A(k,\sigma)$ 既包括了普通的（瘦）分形，又包括了胖分形. 再将 $A(k,\sigma)$ 推广至 $\mathscr{R}^d$ 中得到 $A(d,k,\sigma)$. 我们计算了 $A(d,k,\sigma)$ 的分形维数和胖分形指数，将在第四章给出较详细的论述.

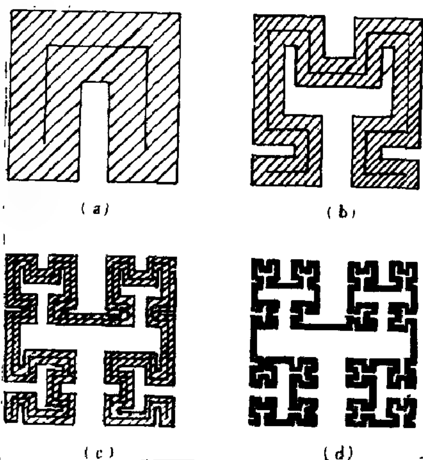


图 2.13 Cantor 曲线，前四步构造

现在来作出通过集合 A 的全部点的简单弧. 如图 2.13 所示. 先取包含第一步得到的四个正方形的弯曲长条，然后再作更窄更弯曲的长条，使它包含 A_2 的全体正方形和 A_3 的全体正方形，等等.

经过 n 步，得到长条 B_n，使得

$$A\subset A_n\subset B_n\subset B_{n-1}$$

极限图形 $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. 由于 $A\subset B$，因此有 $\mu(B)\geqslant\mu(A)=1/2$，即曲线 B 的面积不小于 1/2. 从图 2.13 可见，B 是非常曲折的曲线. 这条曲线有正的面积，不能说是"有长无宽."曲线 B 称为 Cantor 曲线.

这条曲线 B 有类似于 Cantor 尘 A 的性质，即有 $G_2)-G_5)$ 成立，而 $G_1)$ 和 $G_6)$ 不成立，但 B 有拟自相似性. B 也是一胖分形曲线. 最近我们根据 $A(k,\sigma)$，按照 B 的作法，构造出一类曲线 $B(k,\sigma)$. 并讨论了它们的分形特征. 计算表明，$B(k,\sigma)$ 与 $A(k,\sigma)$ 有相同的分维和胖分形指数.

§7 和田曲线

这一反例仍然来自欧几里德关于曲线的描述. 欧几里德曾说，曲线是"曲面的边界". 但是"边界"概念包含着很多意外情况. 人们习惯于认为，在平面曲线的每一段，平面"从两侧"与它相邻. 例如，若 C 是简单闭曲线，则由 C 决定的两个区域 U 和 V 在 C 的沿线

到处与它相邻. 即$\forall x \in C$,不论在离 x 多近的地方,都有区域 U 和 V 中的点."直观上以为很明显的"是,平面曲线不会是平面上多于两个区域的共同边界,这些区域在曲线的沿线到处都与它相邻. 然而直观又一次迷惑了我们. 日本数学家和田发现,平面上存在作为三个区域共同边界的曲线.

设有被海洋环抱的陆地,它上面有两个湖:暖湖和冷湖. 为了把湖里和海里的水引到旱地,开凿运河. 第一天从暖湖开运河,使它不与海水和冷湖的水相通且旱地的点到暖湖水的距离不大于 1. 第二天从冷湖开运河,使它没有一处与海、暖湖或早一天所开的运河相通,且留下的旱地的每个点到冷湖水的距离不大于 1. 第三天按同样的要求从海洋开运河.

在以后三天,继续延长运河,使留下的旱地的每个点到两湖水和海水的距离都小于 1/2. 再以后三天,运河网的密度扩充到使任何水面离留下旱地每个点的距离不大于 1/4,等等. 由于在每工作一天后,留下的旱地仍连成一片,因此可以在下一天用更稠密的运河网遍布它.

在极限情形我们得到的是这样的暖水、冷水和海水网,它们不在任何处相混. 至于留下的旱地,它已经是"曲线",并且对于这条曲线的任意点,都有暖水、冷水和海水接近它. 即是说,在这条曲线的整个延伸处,与它"邻接"的都有三个区域:海连同海水运河,暖湖连同它的运河以及冷湖连同它的运河.

至今还没有人作出和田曲线的图形,但我们可以肯定和田曲线不是光滑的规则曲线,而是一条分形曲线. 从其构造不难知道,它具有类似于 G_2)—G_5)的几何性质. 它具有某种自相似性但未必是严格自相似的. 它是否有正的勒贝格测度也尚不清楚,估计它有非整数的分维. 若能作出这一曲线的图,就可以计算出它的盒维数(第三章). 我们猜测,和田构造类似于流体在非均匀介质中产生的

渗流网络.这一猜测可根据和田构造的规则编制算法和程序,用四种颜色分别代表旱地、海水、暖湖水及冷湖水,通过计算机作图来验证.估计这一渗流网络比计算机产生的"粒子随机聚集的渗流网络"要复杂一些.我们认为:和田构造可作为非均质地层中油气水三相渗流的分形模型.由于地下油气水处于高温高压状态,所以在水驱油过程中,在关井后压力恢复曲线处理中都可能遇到油气水三相渗流.因此,这一分形模型可能在油田开发中会有重要应用.鉴于此,和田构造是值得深入研究的.这部分包含了作者的推断与猜测,很多有意义的问题有待进一步研究.

至此,我们已经介绍了来自分析学、几何学与拓扑学中的部分反例.由函数的迭代产生的"怪异"结构我们将在第五章介绍.我们看到,这些所谓"病态"结构恰与自然界的很多复杂形态,如雪花、海岸线、渗流等不谋而合.这些难以想象的错综复杂的结构不仅仅是数学奇葩,它们为描绘组织结构形态提供了一种极其简洁的方法.正如弗里曼·戴桑所说

"……这些数学家为从十九世纪自然主义的樊笼中挣脱出来而创造的所谓病态结构原来却是我们周围所有熟悉物体中所固有的."

§8 分形集的描述

前面我们已经多次提到"分形"这个词,但一直未对它的意义给予说明.在有了一些直观概念和准备以后,自然要对这一新的概念进行系统的阐述.

"分形"这个词最早由郝柏林从英文"fractal"译来."fractal"是Mandelbrot 在 1975 年从拉丁名词"fractus"(英语里同源词为"fracture",意为断裂、碎片)和英文"fractional"(意为部分、分数)

杜撰出来的一个新词，以命名他的新几可学——分形几何学(fractal geometry). 从此多了一个在英文词典上至今找不到的词语. 我国对这个词有多种译法，如译为"断片"、"裂殖体"、"碎形"、"分数维"或不译而直称"fractal"等，更多的译作分形.

对分形的定义曾进行了长达十几年的探索，也出现了很多的"定义"，有些好一点，有些差一点，但至今没有一个完全令人满意的，争论也不少.

1975 年，Mandelbrot 对分形给出尝试性定义：一个集合 F 称为分形集，如果 F 的 Hausdorff 维 $D_H(F)$严格大于其拓扑维数 $D_T(F)$，即 $D_H(F)>D_T(F)$. 但是有很多集，它们具有分形集的若干特征，但由于其 $D_H=D_T$ 而被排除在分形几何的门外. Mandelbrot 对这个定义也越来越不满意.

1985 年，Taylor 和 Tricot 系统地研究填充维数以后，认为下述对分形集的定义更合理.

设 $A\subset\mathscr{R}^n$，若 $D_T(A)<D_H(A)=D_P(A)$，则称 A 为分形集. 这里 $D_P(A)$表示 A 的填充维数.

上述"定义"也不完全令人满意，它也将排除一些具有分形性质的集. 而且这一"定义"本身要求的东西多. 要说明一个集合是分形集，就要计算其拓扑维数，Hausdorff 维数和填充维数. 在第三章我们将看到，集合的 Hausdorff 维数计算是很困难的，而填充维数的计算更困难. 因此，它使分形几何的理论不便应用. 这是应用科学家们所不希望的.

1986 年，Mandelbrot 又给出分形的下述定义.

称 F 是一个分形集，如果 F 的局部以某种方式与整体相似.

这一"定义"体现了数学上大多数"奇异"集合的特征. 尤其是抓住了自然界中很多现象和形态或组织结构在尺度变换方面表现出的对称性. 这一"定义"使物理学家和其它领域的科学家们感到

非常高兴.他们很容易找到他们所熟悉的领域中很多对象在形态、组织结构、时间、能量、信息等诸方面表现出的某种相似性.这可将分形几何理论升华为自然科学的方法论——分形理论.而且能用分形理论或定性或定量地描述和解决他们的具体问题.因此这一“定义”有利于分形应用的发展.我们认为,Mandelbrot 的这一“定义”也不是分形集的精确定义.从数学的角度来讲,对一客观存在的对象的定义,除了能描述对象的特征以外,还应具有唯一性(即不能有两个本质不同的对象合乎这一定义)和确定性(即不能使同一对象从某一方面说符合这一定义,而从另一方面说又不符合这一定义).而“以某种方式”似乎含有不确定性因素,此外它也将排除有些螺线可作为分形集的情形.因为螺线的局部未必和整体有相似性.

1985 年,Falconer 在他的著作中从几何特征方面给出分形集的描述:分形集的几何特征主要在两个方面.其一是这种集合在其几乎每一点的每一个邻域里,点的分布是零落散乱疏稠无规的;其二是这种集合在其几乎每一点是没有切线的.但对于某些螺线,由于其光滑性而不具备上述几何特征,然而也可以认为是分形的.

1989 年,Falconer 再一次在他的著作中提出,对分形可以用生物中对“生命”定义的同样方法处理.即把分形看成是具有某些性质的集合,而不去寻找精确的定义.严格的定义几乎总要排除掉一些有趣的情形.从数学家的观点看来,这样处理并不是什么坏事.数学上也不乏未予定义而只能描述的对象的先例.比如集合本身就是未予定义而只能描述的一个词.混沌也是一样,现在不论是数学家还是物理学家和其它科学家,都在热烈地讨论和使用这一概念,至今也没有一个统一的定义.Falconer 提出如下描述

称集 F 是分形,即认为它具有如下典型性质:

(Ⅰ)F 具有精细结构,即有任意小比例的细节.

(Ⅱ)F 是如此的不规则，以至它的局部和整体都不能用传统的几何语言来描述.

(Ⅲ)F 通常有某种自相似的形式，可能是近似的或是统计的.

(Ⅳ)一般地，F 的“分形维数”(以某种方式定义)大于它的拓扑维数.

(Ⅴ)在大多数令人感兴趣的情形下，F 以非常简单的方法定义，可能由迭代产生.

自然界中并没有像数学中描述的那种真正的分形. 但是自然界中的形态，在一定尺度范围内近似地或统计地表现出上述特征或性质. 而且还未必都是形态，可以是自然界的实际对象或经济、社会领域中的某些系统在能量、质量、信息、时间或其它物理量方面显示出这些特征. 把这些复杂的对象或系统近似地看成分形，从而用分形几何的语言或维数来描述这些对象已取得了较好的效果，正如 Mandelbrot 所写到的那样：

“科学家发现他们以前必须称为粒状、流体状、中间状、丘疹状、麻窝状、树枝状、海草状、奇异状、紊乱状、弯曲状、波形状、束状、折皱状等不少形状从今以后能以严格的和强有力的定量方法加以处理，对此他们将会惊喜不已.

数学家发现那些至今为止认为奇异的(分形)集在某种意义上说应该是规则的. 被认为是病态的结构应该自然而然地从非常具体的问题中演化出来. 对于大自然的研究应该有助于解决一些老问题和产生如此之多的新问题，对此他们将会惊喜不已.”

第 三 章

分形维数

维数是刻画集合的一个重要量度. 从不同的观点可以给出集合不同的维数. 本章将介绍相似维数、Hausdorff 维数、盒维数等等. 它们都能定量地刻画分形集的复杂程度且可以取分数. 有时我们将分形集的各种维数统称为分形维或分维(有些作者称为分数维、细心的读者将会发现这两种称呼的差别). 当集合成为规则集时,各种分维都与拓扑维一致且取整数.

§1 相似维数

欧氏维数与拓扑维数的特点是集合的维数取整数. 我们已看到,它不能对 Cantor 尘、Koch 曲线和 Sierpinski 地毯等一类集合提供好的刻画. 因此有必要引入新的维数,并将其维数值拓广到分数. 实际上,早在 1919 年,德国大数学家 Hausdorff 就提出了这一思想.

基于对图形特征的下述描述,可以提出相似维数.

像 Cantor 尘、Koch 曲线、Sierpinski 地毯和垫这样的集合,其任一局部的形状与整体是相似的. 即只要将每一个局部放大一定

倍数就可得到与整体一致的图形. 这种集称作自相似集. 下章我们将给出其数学描述,对这类自相似集可给出相似维数.

若一个集F由m个与它相似的部分组成且相似比为r,则认为F具有相似维数

$$D_s=-\log m/\log r$$

按照这一定义,直线段的维数为1. 事实上,一条直线段可看成由与它相似的4个比例系数为1/4的相似形组成,维数 $D_s=-\log 4/\log\frac{1}{4}=1$. 而一个正方形由4个比例系数为1/2的与之相似的正方形组成,维数 $D_s=-\log 4/\log\frac{1}{2}=2$. 同样,Cantor尘可看成4个相似比为1/9(或2个相似比为1/3)的部分组成,则 $D_s=-\log 4/\log\frac{1}{9}=\log 2/\log 3$. 而Koch曲线由4个相似比为1/3(16个相似比为1/9)的部分组成,$D_s=\log 4/\log 3$. Sierpinski地毯,由8个相似比为1/3的部分组成,$D_s=\log 8/\log 3$. 而垫由3个相似比为1/2的部分构成,$D_s=\log 3/\log 2$.

在新的维数观点下,我们已看到,通常的那些正则集,其维数为整数. 而对于第二章描述的奇异集合,其维数都是分数. 现在有了分数维,将科契曲线作为 $\log 4/\log 3=1.262$ 维的曲线. 前两章关于海岸线和科契曲线长度测量的讨论说明,用直尺来量它们,当尺度→0时,量值为∞. 这是因为量尺的维数与海岸线的维数不一致. 这道理很简单,用正方形去量线段的面积,结果肯定为0,而用线段去量正方形的长度,结果必为∞. 直尺的维数为1,去量1.262维的海岸线或Koch曲线,结果也为∞. 设想用1.262维的尺子来量Koch曲线,在弧微分情形,也会量得有限"长度". 事实上,这时Koch曲线的"长度" $=\sum_{k=1}^{\infty}4^k 3^{-D_s k}=4/(3^{D_s}-4)$. 同理,用约为1.26的尺子去量英国海岸线,即使小到原子尺度,也不会量

出天文数字而为有限值.但是,这种长度并不是欧氏意义下的普通长度,而是从长度推广来的一种测度.实际上它就是 Hausdorff 测度.

集合的维数基本上刻画了集合的整体复杂程度和占据空间的规模.从对图形作更细致的分类这一点上说,相似维数似乎比欧氏维数和拓扑维数都要好些.但遗憾的是,相似维数只对严格自相似的这一小类集有意义,比如产生 Cantor 曲线的尘集,虽从图形的形状上看局部与整体有一定相似性,但 A_k 与 A_{k+1} 之间的相似比与 k 有关而不是常数,相似维数对它就无效了.这类集实际上并非严格的自相似集.但它具有"拟自相似性".即这个集的任意小的部分可以放大,然后平滑地变形使之与较大的部分相似,拟自相似的严格定义留待第五章给出.

为了刻画更广泛的集类,需要引入更具一般性的维数,Hausdorff 维数正是这样的一种维数.

§2 豪斯道夫测度和维数

豪斯道夫(Hausdorff)维数具有对任何集有意义的优点,而且可能是数学理论上最重要的一种维数.但是在很多情形下很难计算或估计它的值.所以,目前豪斯道夫维数还难以应用,但要理解分形的数学机理,有必要了解豪斯道夫测度和维数.本节我们对豪斯道夫测度和维数的概念、性质作较详细介绍,但其证明略去,它可在 Falconer 的书中找到.

一. 豪斯道夫测度

豪斯道夫维数可以对一般度量空间的子集定义.因而可以定义在黎曼流形上.这里只考虑 n 维欧氏空间 $\mathscr{R}^n$,其一子集 U 的直径定义为

$$|U|=\sup\{\|x-y\| \mid x,y\in U\} \tag{3.1}$$

一子集族$\{U_i\}$(有限或可数)称为另一集合 F 的一个 δ—复盖,如果 $F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ 且对每一i,都有 $0<|U_i|\leqslant\delta$.

设 F 为 $\mathscr{R}^n$ 中任一子集,s 为一非负实数,对∀ δ>0,定义

$$H_\delta^s(F)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s \mid \{U_i\}\text{为 F 的 }\delta\text{—复盖}\} \tag{3.2}$$

于是考察所有直径不超过 δ 的 F 的复盖,并试图使这些直径的 s 次幂的和达到最小.当 δ 减小时,(3.2)式中能复盖 F 的集类是减少的,所以下确界 $H_\delta^s(F)$随着增加,而且当 δ→0 时,趋于一极限,记

$$H^s(F)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^s(F) \tag{3.3}$$

∀ $F\subset\mathscr{R}^n$,$H^s(F)$存在,但可以为 0 或∞,$H^s(F)$称为 F 的 s一维豪斯道夫测度.可以证明 H^s 为一测度且具有如下性质

Ⅰ) $H^s(\Phi)=0$,Φ 表示空集;

Ⅱ) 若 $E\subset F$,则 $H^s(E)\leqslant H^s(F)$;

Ⅲ) 设$\{F_i\}$为可数的不交 Borel 集序列,则

$$H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i)=\sum_{i=1}^{\infty}H^s(F_i). \tag{3.4}$$

豪斯道夫测度是长度、面积、体积等类似概念的推广,也是勒贝格测度的推广.当 s 为一整数 n 时,$H^n(F)$与 F 的 n 维勒贝格测度 $L^n(F)$相差一个常数倍.更准确地说,若 F 是 $\mathscr{R}^n$ 中 Borel 子集,则

$$H^n(F)=C_nL^n(F) \tag{3.5}$$

这里常数 $C_n=\pi^{\frac{1}{2}n}/2^n(\frac{1}{2}n)!$

即直径为 1 的 n 维球的体积. 比如对 $\mathscr{R}^n$ 中"好的"低维子集,$H^0(F)$是 F 中点的数目.若 F 分别为光滑曲面、通常三维体、m 维光滑流形,则

$H^1(F)=\text{Lenth}(F)$

$H^2(F)=\frac{1}{4}\pi\times\text{Aera}(F)$

$H^3(F)=\frac{1}{6}\pi\times\text{Vol}(F)$

$H^m(F)=C_m\times\text{Vol}^m(F)$

长度、面积和体积的比例性质：当长度放大 λ 倍时，曲线长度放大 λ 倍. 平面区域的面积放大 λ^2 倍，3 维物体的体积放大 λ^3 倍，由此可以预料，s 维豪斯道夫测度放大 λ^s 倍，即有

命题 3.1 若 $F\subset\mathscr{R}^n,\lambda>0$，则

$$H^s(\lambda F)=\lambda^s H^s(F) \tag{3.6}$$

这里 $\lambda F=\{\lambda x|x\in F\}$ 为一集，即将 F 按比例放大了 λ 倍.

设映射 $f:F\to\mathscr{R}^n$ 并满足指数为 α 的霍德尔(H ö lder)条件，即对常数 $c>0$，和 $\alpha>0$，有

$$\| f(x)-f(y) \| \leqslant c \| x-y \|^\alpha \tag{3.7}$$

则 F 与它的像集的豪斯道夫测度有下述关系

$$H^{s/\alpha}(f(F))\leqslant c^{s/\alpha}H^s(F) \tag{3.8}$$

条件(3.7)是使 f 连续的条件. 这时称 f 是 H ö lder 连续的，其指数为 α. 特别在 $\alpha=1$ 时

$$\| f(x)-f(y) \| \leqslant c \| x-y \| \quad (x,y\in F) \tag{3.9}$$

这时 f 称为李卜希兹(R. O. S. Lipschitz)映射，由(3.8)

$$H^s(f(F))\leqslant c^s H^s(F) \tag{3.10}$$

由中值定理和(3.9)立即可得，任何具有有界导数的可微映射都是李卜希兹映射. 若 f 是保长映射，即 $\| f(x)-f(y) \| = \| x-y \|$，则 $H^s(f(F))=H^s(F)$. 由此知道，豪斯道夫测度在刚体运动下保持不变.

二. 豪斯道夫维数

从(3.2)易见，对给定的 F 和 $\delta<1$，$H^s_\delta(F)$对 s 不增. 由(3.3)

$H^s(F)$也不增. 对 F 的 δ—复盖$\{U_i\}$和 $t>s$ 易推得

$$\sum_i |U_i|^t \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \tag{3.11}$$

对所有的 δ—复盖取下确界得到

$$H_\delta^t(F) \leqslant \delta^{t-s} H_\delta^s(F) \tag{3.12}$$

令 $\delta \to 0$ 并设 $H^s(F)$为有限值，则从(3.12)得

$$H^t(F)=\begin{cases}0 & \text{若 } t>s \\ H^s(F) \text{ 为有限值} & \text{若 } t=s \\ \infty & \text{若 } t<s\end{cases}$$

例如，设 F 是一有界的光滑曲面，则

$$H^2(F)=\frac{1}{4}\pi \times \text{Aera}(F)$$

$$H^s(F)=\infty \qquad 0 \leqslant s<2$$

$$H^s(F)=0 \qquad 2<s<\infty$$

即 $H^s(F)$关于不同的 s，存在一个使 $H^s(F)$从∞跳跃到 0 的唯一临界值 s_0，这个临界值 s_0 称为 F 的豪斯道夫维数，记作 $D_H(F)$. 精确地，定义

$$D_H(F)=\inf\{s \mid H^s(F)=0\}=\sup\{s \mid H^s(F)=\infty\} \tag{3.13}$$

所以有

$$\begin{cases}H^s(F)=\infty & \text{若 } 0 \leqslant s<D_H(F) \\ 0<H^s(F)<\infty & \text{若 } s=D_H(F) \\ H^s(F)=0 & \text{若 } D_H(F)<s<\infty\end{cases} \tag{3.14}$$

满足(3.14)第二个条件的 Borel 集称作 s—集.

豪斯道夫维数满足下述性质

Ⅰ） 若 F 为 $\mathscr{R}^n$ 中的开集，则 $D_H(F)=n$；

Ⅱ） 若 F 为 $\mathscr{R}^n$ 中的光滑 m 维流形，则 $D_H(F)=m$；

由此可知 $\mathscr{R}^3$ 中光滑曲线 $D_H(F)=1$，光滑曲面 $D_H(F)=2$，这也可以从豪斯道夫测度与勒贝格测度之间的关系得到.

Ⅲ） 单调性. 若 $E \subset F$，则 $D_H(E) \leqslant D_H(F)$；

Ⅳ） 可数稳定性. 若 $\{F_i\}$ 为一可数集序列，则

$D_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \mathrm{Sup}\{D_H(F_i) \mid 1 \leqslant i < \infty\}$；

Ⅴ） 若 F 是可数集，则 $D_H(F) = 0$.

在构造康托曲线时所得的康托尘，具有正的 2 维勒贝格测度，由(3.5)，它也有正的有限值的 2 维豪斯道夫测度. 由定义，其豪斯道夫维数为 2. 由单调性Ⅲ，康托曲线的豪斯道夫维数也为 2.

对给定 F，$D_H(F)$ 为定值，$H^{D_H(F)}(F)$ 也为定值. 若 F 为严格自相似的，设 F 由 K 个与自身相似的部分组成，相似比为 λ. 将 F 沿每个独立方向放大 λ 倍，由自相似的性质，$H^{D_H}(\lambda F)/H^{D_H}(F) = k$. 由(3.6)，对严格自相似集 F，其豪斯道夫维数满足 $k = \lambda^{D_H(F)}$，由此得

$$D_H(F) = \log k / \log \lambda \qquad (3.15)$$

简单计算知，三分康托集的 $D_H = \log 2/\log 3$，科契曲线 $D_H = \log 4/\log 3$，谢尔品斯基地毯 $D_H = \log 8/\log 3$，垫 $D_H = \log 3/\log 2$，即严格自相似集的豪斯道夫维数与相似维数相等.

在满足一定条件的映射 f 下，F 及其像 f(F) 的豪斯道夫维数有如下关系.

命题 3.2 设 $F \subset \mathscr{R}^n$，$f: F \to \mathscr{R}^m$ 满足 Hölder 条件(3.7)，则

$D_H(f(F) \leqslant D_H(F)/\alpha$

命题 3.3 Ⅰ）若 $f: F \to \mathscr{R}^m$ 为李卜希兹映射，则

$D_H(f(F)) \leqslant D_H(F)$.

Ⅱ）若 $f: F \to \mathscr{R}^m$ 为双李卜希兹映射，即

$$c_1 \| x - y \| \leqslant \| f(x) - f(y) \| \leqslant c_2 \| x - y \| \quad (x, y \in F) \qquad (3.16)$$

这里 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$，则 $D_H(f(F)) = D_H(F)$.

上述命题说明豪斯道夫维数是双李卜希兹变换下的不变量. 它说明，若两集有不同的豪斯道夫维数，则两集之间不存在双李卜

希兹映射. 因此可以看到豪斯道夫维数在分形几何理论中的重要性就好像拓扑学中的"拓扑不变量"一样. 拓扑学中,若两个集之间存在同胚映射,则在拓扑等价的意义下认为是"同一"的. 在分形几何中,同样地可以认为若两集之间存在双李卜希兹映射,则它们是"同一"的. 拓扑中求证两个集拓扑等价,就要想法作出两个集之间具体的同胚. 但要求证两集不同胚,不可能将两个集之间的所有映射拿来检验看它们是否同胚,而是借助于"不变量". 不变量可以是某种几何性质,也可以是数,如 Euler－Poincare 示性数. 也可以是代数系统,如同伦群、同调群. 若求出的不变量不一样,就可以证实两空间不同胚. 同理,在分形几何中,可以选取包括维数这样的参数来区分非双李卜希兹等价的集,而且豪斯道夫维数比拓扑参数提供了更多的信息,它提供了分形之间更进一步的特征区别.

命题 3.4 设 $F\subset\mathscr{R}^n$,若 $D_H(F)<1$,则 F 是完全不连通的.

这一命题的条件 $D_H(F)<1$ 是充分但不是必要的,在第一章给出的产生 Cantor 曲线的尘集 $D_H=2$,但它是完全不连通的.

豪斯道夫维数的定义似乎提供了计算方法,但是按定义来计算维数是相当困难的. 我们看到,为了计算集 F 的维数,要考虑集 F 的各种各样的 δ－复盖,这个集类是很宽的. 然后从这些复盖中选出最好的复盖即下确界. 即使找到了好的复盖,还要估计出在直径的适当幂次方(相当于权)s 下,测度 $H^s(F)$收敛于正的有限值,也就是要估计出 $H^s(F)$的上下界,而下界的估计往往是非常困难的.

即使像三分康托集那样最简单的分形集,其豪斯道夫维数的严格计算也非易事. 对于这类严格自相似的集,可用(3.6)或 Falconer 所谓的"启发式计算". 虽不是很严格的,但往往求出的就是这类集的豪斯道夫维数的正确值.

定义实际上并未给出计算维数的有效方法,寻找简便有效而

又严格的计算任意 F 的豪斯道夫维数的技巧与方法，是分形几何理论工作者和应用科学家急切期待解决的.

考虑 F 的任意可列 δ－复盖$\{U_i\}$，选取的集类较大. 选用较小的集类，比如只用可数球序列，可数开集或闭集序列来作 F 的 δ-复盖，可以得到与豪斯道夫维数等价的定义，但是维数计算的方法并未获得实质性进展.

为了理论研究需要和其它目的，还可引入网测度和维数函数（可参考 Falconer 的著作.）.

豪斯道夫维数的计算如此困难，应用科学家们想借助于这一维数来描述自然界复杂形态的几何特征，也只能望而兴叹了. 因此还有待于引入其它维数，盒维数(Box－Counting dimension)就是其中之一.

§3 盒 维 数

盒维数是应用最广泛的维数之一. 这种维数的计算及经验估计相对容易些. 它有很多种称呼，如 Kolmogorov 维数，容量维数等等.

设 $F\subset\mathscr{R}^n$ 为任意非空有界集. 用 $N(\delta,F)$ 表示复盖集 F 所需直径最大为 δ 的集的最少数目，F 的上、下盒维数定义为

$$\overline{D_B(F)}=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N(\delta,F)}{-\log\delta} \tag{3.17}$$

$$\underline{D_B(F)}=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N(\delta,F)}{-\log\delta} \tag{3.18}$$

若$\overline{D_B(F)}=\underline{D_B(F)}$，则称其公共值为 F 的盒维数. 记作

$$D_B(F)=\lim_{\delta\to 0}\log N(\delta,F)/-\log\delta \tag{3.19}$$

定义中所用的 δ-复盖仍是一个一般的集类. 为了应用上的方

便，可以根据问题需要选取各种不同的特殊集类作为 δ一复盖，其定义是等价的，比如 $N(\delta,F)$可以是下列之一：

Ⅰ)复盖 F 的半径为 δ 的最少闭球数，

Ⅱ)复盖 F 的边长为 δ 的最少立方体个数，

Ⅲ)与 F 相交的 δ一坐标网立方体的个数，

Ⅳ)复盖 F 的直径最大为 δ 的集的最少个数，

Ⅴ)球心在 F 上，半径为 δ 的互不相交的球的最多个数.

$\mathscr{R}^n$ 中的 δ-坐标网立方体，即形如

$$\prod_{i=1}^{n}[m_i\delta,(m_i+1)\delta] \tag{3.20}$$

的立方体. 记号"$\prod$"表示 n 个连续的笛卡尔积，$m_1,\cdots,m_n$ 都是整数. 在 $\mathscr{R}^1$、$\mathscr{R}^2$、$\mathscr{R}^3$ 中，(3.20)表示长为 δ 的区间，边长为 δ 的正方形，棱长为 δ 的立方块. 设 $N'(\delta,F)$表示 δ-坐标网立方体与 F 相交的个数，显然，这是 $N'(\delta,F)$个直径为 $\delta\sqrt{n}$ 的复盖 F 的集类，因此

$$N(\delta\sqrt{n},F)\leqslant N'(\delta,F)$$

$N(\delta\sqrt{n},F)$表示上述Ⅳ)对应的数目. 若 $\delta\sqrt{n}<1$，则

$$\frac{\log N(\delta\sqrt{n},F)}{-\log(\delta\sqrt{n})}\leqslant\frac{\log N'(\delta,F)}{-\log\sqrt{n}-\log\delta}$$

令 $\delta\to 0$，对上式取上、下极限，有

$$\overline{D_B}(F)\leqslant\overline{\lim_{\delta\to 0}}\log N'(\delta,F)/-\log\delta \tag{3.21}$$

$$\underline{D_B}(F)\leqslant\underline{\lim_{\delta\to 0}}\log N'(\delta,F)/-\log\delta \tag{3.22}$$

另一方面，任何直径最大为 δ 的集合包含在 3^n 个边长为 δ 的网立方体内（即由包含这个集的一些点的一个立方体以及与此立方体相邻的全部立方体组成）. 因此

$$N'(\delta,F)\leqslant 3^n N(\delta,F)$$

取对数再取极限可以得到与(3.21)和(3.22)反向的不等式. 这证明了Ⅲ)与Ⅳ)的等价性. Ⅰ)、Ⅱ)和Ⅳ)的等价性是显然的. 仍设$N'(\delta,F)$表示由Ⅴ)对应的数,$N(\delta,F)$表示Ⅳ)对应的数,则可求出$N'(\delta,F)\leqslant N(\delta,F)$. 取对数与极限就得到Ⅳ)与Ⅴ)的等价性.

盒维数的定义Ⅱ)、Ⅲ)给出了计算它的一个有效且简便的方法,因此广泛地用于处理实际问题. 比如计算一个平面集的盒维数,可以构造一些边长为δ的正方形(盒子),然后计算不同δ值的"盒子"与F相交的个数$N(\delta,F)$,(盒维数由此得名),这个维数是当$\delta\to 0$时,$N(\delta,F)$增加的对数速率. 应用中由$\log N(\delta,F)$相对于$-\log\delta$的图在无标度区内直线的斜率值来估计.

定义Ⅲ)给出了盒维数定义的一个解释. 与集F相交的边长为δ的网立方体的个数正好表示这个集是如何展开的. 维数反映了当$\delta\to 0$时集合的不规则性是如何迅速表现出来的.

Minkowski容度也可推广到分数维. 它的定义虽然形式上与盒维数不同,但二者亦是等价的,集合

$$F_\delta=\{x\in\mathscr{R}^n \mid |x-y|\leqslant\delta, y\in F\} \tag{3.23}$$

称作集F的Minkowski"香肠"(Sausage). 之所以这样称呼,是因为当F为$\mathscr{R}^3$中一条简单弧时,则F_δ象根"香肠". 考虑当$\delta\to 0$时F_δ的n维体积收缩的速度. 设$F\subset\mathscr{R}^3$,若F为一个点,则F_δ是体积$\mathrm{Vol}(F_\delta)=\frac{3}{4}\pi\delta^3$的闭球;若F是长度为l的线段,则$F_\delta$象根"红肠",且$\mathrm{Vol}(F_\delta)\sim\pi l\delta^2$;若F是面积为a的平面区域,则$F_\delta$是F的加厚,$\mathrm{Vol}(F_\delta)\sim 2a\delta$. 在这三种情况下,都有$\mathrm{Vol}(F_\delta)\sim c\delta^{3-s}$,s为整数是F的维数,所以$\delta$的指数是维数的标志. 而$\delta^{3-s}$的系数c称为Minkowski容量,即相应集的长度、面积和体积的量度.

1928年,G. Bouligand把上述思想平行地移动到不规则集与分数维,亦称作Bouligand维数,记作$D_{BG}(F)$. 设$F\subset\mathscr{R}^n$,对某个

常数 s，当 $\delta \to 0$ 时，如果 $\mathrm{Vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}$ 趋于正的常数，则 D_{BG} 定义为

$$D_{BG} = \inf\{s \mid \lim_{\delta\to 0} \delta^{n-s}\mathrm{Vol}^n(F_\delta) = 0\}$$
$$= \sup\{s \mid \lim_{\delta\to 0} \delta^{n-s}\mathrm{Vol}^n(F_\delta) = \infty\}. \tag{3.24}$$

由于 $D_{BG} \geq D_H$，故 D_{BG} 是比豪斯道夫维数更细的维数，用 D_{BG} 可以将螺线作很好的分类. 如螺线 $\rho = (1+\theta)^{-a}$，$D_{BG} = \max\{1, 2(1+a)^{-1}\}$. 而螺线 $\rho = [\log(2\theta+1)]^{-1}$ 与 $\rho = (1+\theta)^{-1}$ 的 D_{BG} 分别为 2 和 1，前者缓慢地趋于 0，而后者迅速地趋于 0，即前者有填满原点邻域的能力. 由于这些曲线的光滑性，$D_H = D_T = 1$，它们不能对螺线进行分类，而 D_{BG} 则较好地刻画了螺线收敛于 0 或填满原点的能力.

但是 Minkowski 容度这个用起来较少限制的概念，因为在不交集上它不必满足可加性，因此它不是测度，甚至这个极限不存在时，也可以求 δ 的临界指数. 这个结果与盒维数有关. 下述命题说明，Minkowski 容度与盒维数等价. 因此，盒维数有时被称为 Minkowski 维数.

命题 3.5 设 $F \subset \mathscr{R}^n$，F_δ 按(3.23)定义，则

$$\underline{D_B}(F) = n - \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log\mathrm{Vol}^n(F_\delta)}{\log\delta} \tag{3.25}$$
$$\overline{D_B}(F) = n - \underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log\mathrm{Vol}^n(F_\delta)}{\log\delta}$$

在前面我们已经看到豪斯道夫维数的性质. 一般地，对一个"维数"D，我们也希望它具有那些典型的性质，即

Ⅰ)单调性：若 $E \subset F$，则 $D(E) \leq D(F)$.

Ⅱ)稳定性：$D(E \cup F) = \max\{D(E), D(F)\}$.

Ⅲ)可数稳定性：$D(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup\{D(F_i) \mid 1 \leq i < \infty\}$.

Ⅳ)几何不变性：若 f 是 $\mathscr{R}^n$ 中的全等变换(平移、旋转、反射

及其复合),相似变换或仿射变换等,则 $D(F)=D(f(F))$

Ⅴ)李卜希兹(R. O. S. Lipschitz)不变性:若 f 是双李卜希兹变换,则

$$D(f(F))=D(F).$$

Ⅵ)若 F 是有限或可数集,则 $D(F)=0$.

Ⅶ)若 F 是 $\mathscr{R}^n$ 的开子集,则 $D(F)=n$.

Ⅷ)若 F 是 m 维光滑流形,则 $D(F)=m$.

现在看一看盒维数所具有的性质. 可以验证,盒维数或上、下盒维数满足以下各条:

Ⅰ)若 F 是 $\mathscr{R}^n$ 上的 m 维光滑子流形,则 $D_B(F)=m$.

Ⅱ)$\overline{D}_B$ 与 $\underline{D}_B$ 是单调的.

Ⅲ)$\overline{D}_B$ 是有限稳定的,即 $\overline{D}_B(E\cup F)=\max\{\overline{D}_B(E),\overline{D}_B(F)\}$,但是 $\underline{D}_B$ 却没有这个性质.

Ⅳ)$\underline{D}_B$ 和 $\overline{D}_B$ 是李卜希兹不变的.

盒维数也具有象豪斯道夫维数那样的在李卜希兹和 Hölder 变换下的性质,但是盒维数也有一些不好的性质.

命题 3.6 设 $F\subset\mathscr{R}^n$,$\bar{F}$ 是 F 的闭包,则

$$\underline{D}_B(\bar{F})=\underline{D}_B(F)$$

$$\overline{D}_B(\bar{F})=\overline{D}_B(F)$$

这个命题似乎很不错,但是由此很容易得出如下推论

设 F 是 $\mathscr{R}^n$ 上开区域的稠密子集,则 $\underline{D}_B(F)=\overline{D}_B(F)=n$.

比如,F 是[0,1]上的全体有理数组成的集(可数集),则 $\bar{F}=[0,1]$,因此 $\overline{D}_B(F)=\underline{D}_B(F)=1$,这一结果使盒维数不具有我们所希望的维数的性质Ⅵ). 同时也使得Ⅲ)不成立,因为每一个有理数作为单点集盒维数为 0,但其可数并的盒维数为 1. 而且还可以找到很稀疏的点集,其盒维数仍为有限正数.

例 3.1 令 $F=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ 计算可知 $D_B(F)=\frac{1}{2}$. 事实上，$|U|=\delta<\frac{1}{2}$，k 是满足 $\frac{1}{k(k+1)}\leqslant\delta<\frac{1}{k(k-1)}$ 的整数，则 U 最多只能复盖 $\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k}\}$ 中的一个点，因此复盖 F 至少需要 k 个直径为 δ 的集. 故

$$\frac{\log N(\delta,F)}{-\log\delta}\geqslant\frac{\log k}{\log k(k+1)}$$

令 $\delta\to0$ 得 $\underline{D}_B(F)\geqslant\frac{1}{2}$. 另一方面，若 $0<\delta<\frac{1}{2}$，还是取 k 满足 $\frac{1}{k(k+1)}\leqslant\delta<\frac{1}{k(k-1)}$，则 $k+1$ 个长度为 δ 的区间复盖 $[0,1/k]$，留下 F 的 $k-1$ 个总可以由另外 $k-1$ 个区间复盖，则

$$\frac{\log N(\delta,F)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log 2k}{\log k(k-1)}$$

故有 $\overline{D}_B(F)\leqslant\frac{1}{2}$，由此 $D_B(F)=\frac{1}{2}$.

这个集几乎每一点都是分离的，但它却有分数的盒维数.

为了避免盒维数的上述缺陷，可以对盒维数的定义进行修改，其想法是将 F 分成可数块 F_1、F_2、…，使得最大的一块具有尽可能小的维数，将修改的盒维数记为 $D_{MB}(F)$，其定义为

$$\underline{D}_{MB}(F)=\inf\{\sup_i \underline{D}_B(F_i)\mid F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\},$$

$$\overline{D}_{MB}(F)=\inf\{\sup_i\overline{D}_B(F_i)\mid F\subset\bigcup F_i\}.$$

此时，对 $\mathscr{R}^n$ 的任意子集有

$$0\leqslant D_H(F)\leqslant\underline{D}_{MB}(F)\leqslant\overline{D}_{MB}(F)\leqslant\overline{D}_B(F)\leqslant n.$$

但是对任意可数集，恰好可以取 F_i 为单点集. 从而有 $\underline{D}_{MB}(F)=\overline{D}_{MB}(F)=0$.

对于数直线上的紧集，可以证明其盒维数与修改的盒维数相等，即

命题 3.7 设 $F\subset\mathscr{R}$ 是紧致的，且对所有与 F 相交的开集 V

$$\overline{D}_B(F\cap V)=\overline{D}_B(F)$$

则 $\overline{D}_B(F)=\overline{D}_{MB}(F)$，对下盒维数，类似等式成立.

修改的盒维数 $\underline{D}_{MB}$ 和 $\overline{D}_{MB}$ 恢复了我们所期望的维数性质，但是这又重新造成了与豪斯道夫维数类似的计算的困难，因此并不令使用者感兴趣.

盒维数虽然有一些不好的性质，但是它不仅给使用者带来了方便，而且在分形理论上也很有用. 人们经常可以证明一些集的盒维数与豪斯道夫维数相等，利用这两种维数的相互联系，可以在应用中产生较好的效果.

现在我们来计算三分康托集的盒维数.

例 3.2 三分康托集 F 由 E_k 的 2^k 个长度为 3^{-k} 的区间复盖，取 $3^{-k}<\delta\leqslant 3^{-k+1}$，则 $N(\delta,F)\leqslant 2^k$，由(3.21)

$$\overline{D}_B(F)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\log N(\delta,F)/-\log\delta\leqslant\lim_{\delta\to 0}\log 2^k/\log 3^{k-1}$$
$$=\log 2/\log 3$$

另一方面，如果 $3^{-k-1}\leqslant\delta<3^{-k}$，任一长度为 δ 的区间最多与构造 F 中的一个长度为 3^{-k} 的基本区间相交. 这样的区间有 2^k 个，所以为复盖 F，至少需要长度为 δ 的区间 2^k 个. 因此 $N(\delta,F)\geqslant 2^k$，即得 $\underline{D}_B(F)\geqslant\log 2/\log 3$. 于是对康托集，$D_H(F)=D_B(F)$.

类似的方法可以证明，科契曲线、谢尔品斯基垫和地毯、康托尘及康托曲线，Peano 曲线，它们的盒维数等于其豪斯道夫维数.

现在我们讨论盒维数与豪斯道夫维数的关系. 由定义(3.2)

$$H^s_\delta(F)\leqslant N(\delta,F)\delta^s.$$

若 $1<H^s(F)=\lim_{\delta\to 0}H^s_\delta(F)$，只要 δ 充分小，就有 $\log N(\delta,F)+s\log\delta>0$，即

$$s\leqslant\lim\log N(\delta,F)/-\log\delta$$

于是得到

$$D_H(F)\leqslant \underline{D}_B(F)\leqslant \overline{D}_B(F)$$

虽然对于像严格自相似那样的分形集，$D_H=D_B$，但也有大量使不等号严格成立的例子.

若 $s=D_B(F)$，从(3.12)可以看出，当 δ 充分小时，$N(\delta,F)\sim\delta^{-s}$. 它说明，如果 $s<D_B(F)$，$N(\delta,F)\delta^s\to\infty$；若 $s>D_B(F)$，则 $N(\delta,F)\delta^s\to 0$，但是

$$N(\delta,F)\delta^s=\inf\{\sum_i\delta^s\mid\{U_i\}\text{是 }F\text{ 的(有限的)}\delta-\text{复盖}\}$$

与(3.2)比较，在计算豪斯道夫维数时，我们给每个复盖集 U_i 以不同的量 $|U_i|^s$，而在盒维数的计算中我们给每个复盖集以相同的量 δ^s. 盒维数可以被看成是表示一个集合能被相同形状的小集合复盖的效率，而豪斯道夫维数涉及的可能是形状相当不同的小集合的复盖. 由于盒维数是由相同形状集的复盖确定的，因此计算起来比豪斯道夫维数容易. 这样，人们自然会有求出 $\upsilon(F)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}N(\delta,F)\delta^s$ 的愿望，但是它不是 $\mathscr{R}^n$ 上子集的测度.

§4 填充测度与填充维数

盒维数或修改的盒维数与豪斯道夫维数不同，它们不是通过测度定义出来的. D_B 可以看成是这样的维数，它依赖于互不相交的半径相等的小球的填充，自然要寻求由半径不同的互不相交的小球尽可能稠密的填充定义的维数. 1982 年，C. Tricot 引入了填充(Packing)测度与维数. 令

$$P_\delta^s(F)=\sup\{\sum_i r_i^s\mid B(x_i,r_i)\text{互不相交},x_i\in F,r_i\leqslant\delta\}\qquad(3.26)$$

其中，$B(x_i,r_i)$表示球心在 x_i，半径为 r_i 的球. 因为 $P_\delta^s(F)$随 δ 减小而递减，其极限

$$P_0^s(F)=\lim_{\delta\to 0}P_\delta^s(F) \tag{3.27}$$

存在.这里又遇见了在盒维数中发生的问题,从对可数稠密集的考虑中就容易看出 $P_0^s(F)$ 不是外测度.为此定义

$$P^s(F)=\inf\{\sum_i P_0^s(F_i)\,|\,F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\} \tag{3.28}$$

则 $P^s(F)$ 是 $\mathscr{R}^n$ 上的测度.称作 s－维填充测度,类似于 D_H,存在唯一的临界指数,记作 $D_p(F)$,叫做填充维数,定义为

$$D_p(F)=\sup\{s\,|\,p^s(F)=\infty\}=\inf\{s\,|\,p^s(F)=0\} \tag{3.29}$$

可以验证,D_p 具有我们对维数所期望有的性质,且可以证明 D_H,D_B,D_p 有如下关系

命题 3.8 $D_p(F)\leqslant\overline{D}_B(F)$. (3.30)

命题 3.9 若 $F\subset\mathscr{R}^n$,则 $D_p(F)=\overline{D}_{MB}(F)$.

推论 设 $F\subset\mathscr{R}^n$ 是紧致的,且对所有与 F 相交的开集 V

$$\overline{D}_B(F\cap V)=\overline{D}_B(F).$$

则 $D_P(F)=\overline{D}_B(F)$.

至此,得到下列关系式

$$D_H(F)\leqslant D_{MB}(F)\leqslant\overline{D}_{MB}(F)=D_p(F)\leqslant\overline{D}_B(F). \tag{3.31}$$

由定义可以看到,在填充维数的研究中,可以利用强有力的测度论技巧,并且它与豪斯道夫维数有许多对偶性质,因此它在分形几何中起着很重要的作用,利用它可刻画乘积集合的维数.但是,仍然不能指望填充维数和测度能便于计算和应用.为了使 $P^s(F)$ 成为测度而增加的(3.28)式使得 D_p 比 D_H 更难于计算,因而也就更难于应用.

命题 3.9 指出的填充维数与修改的上盒维数相等这一事实,不但令人惊奇,而且使它的应用状况稍微得到改善,尤其是对处处具有"局部"常数维紧集的情形,这种改善更为显著.而在实际应用中,特别是在某些自相似集中,这种情形是经常发生的.

若一个分形集 F 的 $D_H=\overline{D}_B$，这是最理想的. 这种情形下，(3.31)中的不等式都成为等式，当然可以通过计算简单的维数来求出 D_H 和 D_p. 然而，只要 $D_H=D_p$ 成立，也可使得对集 F 的分析变得容易些. 虽然这个条件难于证明，但它比 $D_H=\overline{D}_B$ 要弱得多.

最近，许友证明了欧氏空间中，填充维数实际上就是 1971 年 Wegmann 引入的度量维数.

§5 其它维数

维数的定义是多种多样的，可根据不同的目的引入不同维数. 有些维数纯粹是为了应用，且只能在特定的范围内使用，才能解决一些实际问题.

一. 量规(divider)维数

设 C 是一无自交点的约当(Jordan)曲线(即 C 是[a,b]在连续双射 $f:[a,b]\to\mathscr{R}^n$ 下的象). 由于[a,b]紧致，$\mathscr{R}^n$ 是豪斯道夫空间，由拓扑学的一个定理知，C 是[a,b]的同胚像. 设 $\delta>0, x_0, x_1, \cdots, x_m$ 是 C 上的点且满足对 $k=1,2,\cdots,m$，$|x_k-x_{k-1}|=\delta$. 定义 $M_\delta(C)$为点 $x_1,\cdots,x_m$ 的最大数目，则$(M(\delta,C)-1)\delta$ 可以看成利用两脚间距为 δ 的两脚规测量 C 所得的长度. 当下述极限存在时，其值定义为

$$D_{div}(C)=\lim_{\delta\to 0}\log M(\delta,C)/-\log\delta \qquad (3.32)$$

若极限不存在，可改用上、下极限定义上、下量规维数. 曲线的量规维数大于或等于盒维数. 在简单的自相似集(如 Koch 曲线)中它们相等.

这一维数常用于求自然界中的曲线的分维. 例如，对不列颠海岸线，在 20m 到 200km 的范围内，对 $M(\delta,C)$的测量值按(3.32)

回归，估计维数在 1.2 左右.

二. 变化的豪斯道夫维数

设 $f:[a,b]\to\mathscr{R}^n$ 为一曲线. $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ 是 $[a,b]$ 的任一分划. 定义

$$H^{*s}_{\delta}(C)=\inf\{\sum_{i=1}^{m}|f[t_{i-1},t_i]|^s \mid 对任一分划\Delta, |f[t_{i-1},t_i]|\leqslant\delta\},$$

$$H^{*s}(C)=\lim_{\delta\to 0}H^{*s}_{\delta}(C).$$

定义维数

$$D_H^*(C)=\inf\{s\mid H^{*s}(C)=0\}=\sup\{s\mid H^{*s}(C)=\infty\}.$$

其特点是利用曲线自身上的区间作为一组复盖，对 Koch 曲线，$D_H=D_H^*$，对于"挤压"形式的曲线，如 Weierstrars 函数的图象，$D_H^*\geqslant D_H$.

三. 盒维数的变化

设 $A\subset\mathscr{R}^n$，F 为 A 的分形边界，F_δ 是 F 的 Minkowski 香肠，F 的单边维数定义如下

$$D_{BG}^*=n-\lim_{\delta\to 0}\log Vol^n(F_\delta\cap A)/\log\delta \tag{3.33}$$

这个定义能应用到固体的表面. 同时也应用到具有分形边界的偏微分方程中.

四. 由分形余集定义维数

有时还可以通过一个集的余集定义维数. 假定 F 是从单位区间[0,1]中去掉一系列区间 $I_1, I_2\cdots$ 而得到的集. 可以定义维数等于 s_0，使得级数 $\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|^s$ 在 $s<s_0$ 时收敛到 0；$s=s_0$ 时收敛到有限正值；$s>s_0$ 时，级数发散. 如对三分康托集，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}3^{-ks}$，当 $s_0=\log 2/\log 3$ 时收敛到有限正值. 此情形下，s_0 与豪斯道夫维数和盒维数相等. 一般的 s_0 等于上盒维数.

五. 维数印刷(dimension print)

维数印刷是 C. A. Rogers1988 年引入的,它是豪斯道夫维数的有趣变形. 它的定义类似于豪斯道夫维数,但它用矩形复盖并用矩形的边长代替定义中的直径. 可以把它看成是一种“指纹”形维数,使具有相同豪斯道夫维数但有不同特点的集能被区分出来,特别是它表现了各向异性集的性质. 因此可以想象它在物理与自然中会十分有用. 但是它不太容易计算,而且不具有李卜希兹不变性,对其进行改进可克服这一缺陷,但势必更进一步增大计算它的困难. 因此我们这里不作详细介绍.

还有一些实用的维数及其算法,我们将在以后介绍.

从上面介绍的各种维数可以看出,一些表面上很相似的维数定义,具有的性质可能差异很大. 我们不应当也不可能指望不同的定义对同一个集能给出相同的维数值,而应当从它的定义去研究它的性质. 应注意的是,并不存在严格的规则来确定某个量是否能合理地被当成一个维数,无论哪种定义,通常都采用一定形式的幂定律. 但有些定义,既使在简化情况下,也不适合幂定律. 为确定一个量能否作为维数,通常是去寻找它的某种类型的比例性质,特殊意义下的自然性,以及我们所希望的那几个典型性质.

第 四 章

几类重要的分形集

本章讨论几类最重要的分形集：自相似集、自仿射集、递归集、胖分形集.包括它们的数学描述、性质及维数理论.

§1 自相似集

自相似集是目前研究得比较清楚的一类分形集.自相似集直观上最本质的特征是它的局部与整体相似.也就是说，将该集的任一个充分小的局部放大适当倍数，它的形状就和整体一致.例如，三分康托集、科契曲线、谢尔品斯基垫和地毯等，它们都是自相似的.

1981 年，Hutchinson 给出自相似集的严格数学描述：一个变换 $\psi:\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$ 称为压缩变换.如果 $\forall\ x,y\in\mathscr{R}^n$ 和实数 $c<1$，有

$$d(\psi(x),\psi(y))\leqslant cd(x,y) \tag{4.1}$$

使上式对所有 x,y 成立的 c 值的下确界称为压缩比.等号成立时的压缩变换将 $\mathscr{R}^n$ 的每一个子集变换成与自身相似的集，叫做相似变换，压缩比 c 就是相似的标度因子.

由高等几何知，平面上所有相似变换的集合在变换的复合(乘

积）这一运算之下构成一个四维的变换群，称为相似变换群. 正交变换群是它的一个特例.

根据 Klein 的观点，自相似分形几何的实质是研究分形集在相似变换群作用下的不变性质和不变量. 事实上，自相似集本身就是相似变换之下的不变集.

集合 $E\subset\mathscr{R}^n$ 称为压缩变换 $\psi_1,\cdots,\psi_m$ 下的不变集，如果

$$E=\bigcup_{j=1}^{m}\psi_j(E) \tag{4.2}$$

集合 E 称为自相似的. 如果压缩变换 $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ 是相似变换，使 (4.2) 成立且存在 s 使 $H^s(E)>0$，对 $i\neq j$，$H^s(\psi_i(E)\cap\psi_j(E))=0$.

例 4.1 设 $\psi_i:[0,1]\to[0,1]\quad i=1,2$

$$\psi_1(x)=x/3\qquad \psi_2(x)=(2+x)/3$$

易见，ψ_1、ψ_2 是压缩映射且是相似映射，并且三分康托集是 $\{\psi_1,\psi_2\}$ 的唯一紧致不变集.

若 $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ 是 $\mathscr{R}^n$ 的子集 F 上的一族压缩变换，满足

$$\psi(F)=\bigcup_{j=1}^{m}\psi_j(F) \tag{4.3}$$

记 $\psi^0(F)=F$. 对 $\forall\ k\geqslant 0$

$$\psi^{k+1}(F)=\psi(\psi^k(F)) \tag{4.4}$$

表示 ψ 的 k 次迭代，则有

定理 4.1 已给 $\mathscr{R}^n$ 上的压缩映射族 $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$，压缩比 $c_j<1$，即

$$d(\psi_j(x),\psi_j(y))\leqslant c_j d(x,y)$$

$$\forall\ x,y\in\mathscr{R}^n,\quad c_j<1,j=1,\cdots,n \tag{4.5}$$

则存在唯一非空紧集 E，使得

$$E=\psi(E)=\bigcup_{j=1}^{m}\psi_j(E) \tag{4.6}$$

并且，若 F 是 $\mathscr{R}^n$ 的任意紧集，则在 Hausdorff 距离的拓扑意义下

$\psi^k(F)\to E\quad k\to\infty$

定理说明自相似集是一族相似变换下的不变集，对有限序列$\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$的所有排列$\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$，$1\leqslant j_i\leqslant m$，可以证明 E 是映射$\psi_{j_1}\circ\psi_{j_2}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$的不动点的闭包. 下述定理用以估计不变集的豪斯道夫维数.

定理 4.2 若$\{\psi_j\}_{j=1}^m$是$\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$的一族压缩映射，如果

$$q_i d(x,y)\leqslant d(\psi_i(x),\psi_j(y))\leqslant r_i d(x,y)\quad (i=1,2,\cdots,m)\tag{4.7}$$

$x,y\in\overline{V}$，V 是 E 的某一开集，满足当 $i\neq j$ 时

$$\psi_i(V)\cap\psi_j(V)=\varnothing,\quad i,j=1,2,\cdots,m\tag{4.8}$$

则 $D_H(E)\in[s,t]$，而 s，t 是方程

$$\sum_{i=1}^m q_i^s=1=\sum_{i=1}^m r_i^t\tag{4.9}$$

的解. 若对某些 $i\neq j$，$\psi_i(V)\cap\psi_j(V)\neq\varnothing$，则 $D_H(E)\leqslant t$ 成立.

定理的一个特殊情况是$\{\psi_j\}_{j=1}^m$为一列相似变换，这时 $0<q_i=r_i<1$. 自相似集的严格定义就是 E 对某一列压缩相似变换$\{\psi_i\}_{i=1}^m$满足

$$E=\bigcup_{i=1}^m\psi_i(E),\psi_i(E)\cap\psi_j(E)=\varnothing,\quad 1\leqslant i<j\leqslant m\tag{4.10}$$

对于自相似曲线，若每一直线段的变换像与另外直线段的变换像不相交，则迭代的极限图形的 Hausdorff 维数 s 是下述方程

$$\sum_{i=1}^m r_i^s=1\tag{4.11}$$

的解. 若有相交，则上述方程的解 s 是 Hausdorff 维数的一个上界.

用递归方法生成的自相似分形集，当生成元的每个直线段等长时，则相似比 $r_1=r_2=\cdots=r_m=r$，这时分形集的豪斯道夫维数 s 为

$$s=\log m/\log\frac{1}{r}\tag{4.12}$$

由此可以知道三分康托集的豪斯道夫维数 $D_H=\log2/\log3$. 对谢尔品斯基垫 F，$D_H=\log3/\log2$，即是方程$\sum_{s=1}^3(\frac{1}{2})^s=1$ 的解，因

为 F 是三个压缩比为$\frac{1}{2}$的相似映射下的不变集，这些映射把三角形 E_0 变成 E_1 中的三个三角形. 科契曲线 $D_H=\log4/\log3$.

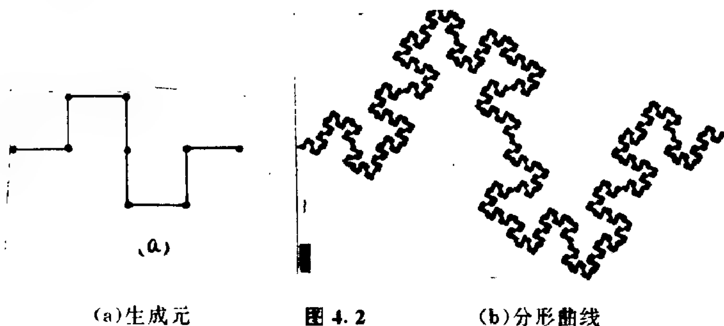
例 4.2 修改的 Koch 曲线. 固定 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$，去掉单位区间 I_0 正中，与全长比例为 a 的一段区间，并用与之组成等边三角形的另外两边代替，把这样的过程反复地进行下去而构造出曲线 F，称作修改的 Koch 曲线. 它将 I_0 映射到 I_1 中的 4 个相似映射下的不变集. 取 V 的底边为 1，高是 $\sqrt{3}/2$ 的等腰三角形，其 $D_H(F)=D_B(F)$是方程 $2a^s+2(\frac{1}{2}(1-a))^s=1$ 的解.

像上述这样的曲线可以用第二章所述的反复用一个生成元的相似图形取代每一直线段的迭代过程建立起来. 由生成元定义的相似映射只能是两个互成反射的映射之一，而它的方向可以用构造中表现出来的第一步确定. 如图 4.1—4.3.



(a)生成元　　图 4.1　　(b)极限曲线

D_H 是 $3(\frac{1}{3})^s+2(\frac{1}{4})^s=1$ 的解，s=1.34.



(a)生成元　　图 4.2　　(b)分形曲线

$D_H=D_B=\log8/\log4=1.5$

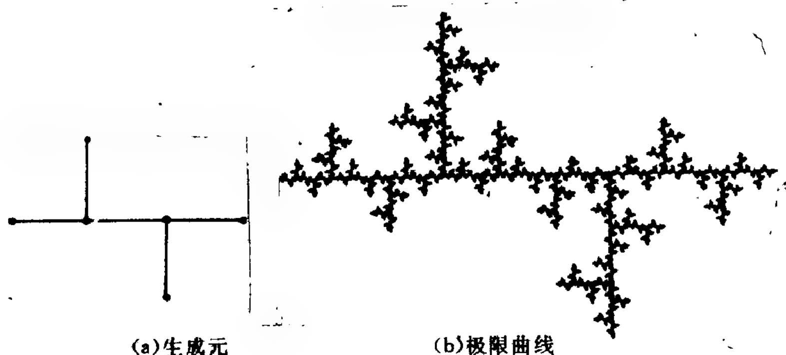


图 4.3 树枝状分形

$D_H = D_B = \log 5/\log 3 = 1.465.$

若集 E 的自相似性质只在统计意义上成立，则说 E 是统计自相似的. 把小部分放大以后，它与整体有相同的统计分布. 自然界中的分形，大都是统计自相似的.

另外还有一类广泛的分形，只具有拟自相似性，它们是自相似的推广. 如有面积的康托尘集和康托曲线. 复解析映照的 Julia 集也表现出拟自相似性. 拟自相似的数学描述我们将在第五章 § 7 给出(即 k—拟等距和 k—拟自相似).

§2 自仿射集

我们已经看到，自相似集沿各个方向的伸缩率都相等. 在前节定义的压缩比为 r 的相似变换将一点 $x = \{x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{R}^n$ 变换成点 $rx = \{rx_1, \cdots, rx_n\}$. 若所定义的变换沿各个方向的伸缩率不全相同，则我们得到自仿射集. 设 $r = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 是一个比率向量，则一个仿射变换把点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变换成点 $(r_1x_1, r_2x_2, \cdots, r_nx_n)$，更一般地，一个映射 $S: \mathscr{R}^n \to \mathscr{R}^n$，称为仿射变换，若

$$S(x)=T(x)+b \quad x\in\mathscr{R}^n \tag{4.13}$$

这里 T 是 $\mathscr{R}^n$ 上的线性变换，T 可以表成一个 $n\times n$ 阶矩阵，且 $\det(T)\neq 0$，而 b 是 $\mathscr{R}^n$ 中的一个向量.

$\mathscr{R}^n$ 的一个子集 F 称为自仿射集.如果 F 是一族仿射压缩变换 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的唯一不变紧集.

例 4.3 设 S_1,S_2,S_3 如下定义：它们把正方形 E 映射成三个矩形，如图 4.4 所示.不变集 F 由 3 个仿射拷贝——$S_1(F),S_2(F),S_3(F)$组成.图中不变集 F 表成由 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$，对充分大的 k，取遍全部 $i_j=1,2,3,\cdots,k$ 的序列$(i_1,\cdots,i_k)$组成的集.

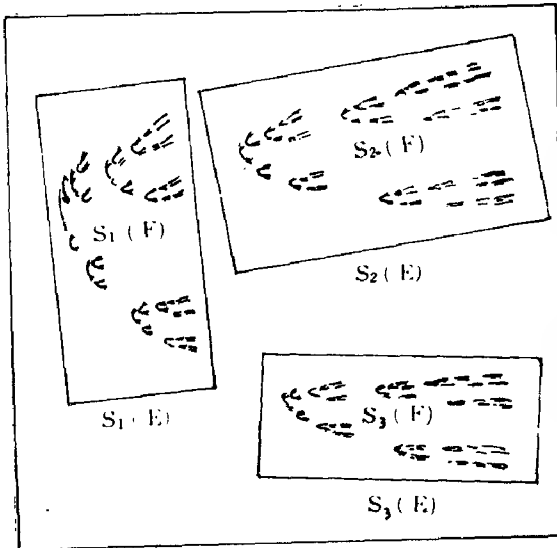


图 4.4 自仿射集

仿射变换是平移、旋转、伸缩可能还有反射的合成.由高等几何知，欧氏平面内全体仿射变换的集合构成一个六维的变换群，称作仿射变换群.按照 Klein 的观点，自仿射分形几何的实质，即研究分形集在仿射变换群作用下的不变性质与不变量，自仿射集正是仿射压缩变换下的不变集.

由于相似变换群是仿射变换群的子群，因此，自相似集是自仿射集的特例.自仿射集是自相似集的推广.这样，我们很自然地也

想将自相似集的维数公式(4.11)扩广到自仿射集，希望维数公式依赖于仿射变换，并由仿射变换的矩阵和向量表达出来. 但是实际情形却复杂得多. 我们通过下述的两个例子来说明.

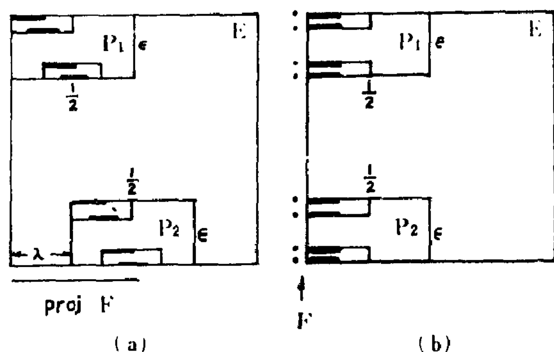


图 4.5 自仿射集维数的不连续性

例 4.4 设 S_1、S_2 是 $\mathscr{R}^n$ 上的仿射压缩映射，它们分别把正方形映射到如图 4.5 所示的边长为 $\frac{1}{2}$ 和 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 的两个矩形 R_1、R_2. 矩形 R_1 与 y 轴的距离为 λ, 若 F 是 S_1 和 S_2 的不变集，则当 $\lambda>0$ 时，$D_H(F)\geqslant 1$；但当 $\lambda=0$ 时，$D_H(F)=\log 2/-\log\varepsilon<1$.

设 $\lambda>0$(图 4.5(a))，则第 k 步的构造 $E_k=\bigcup S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ 包含有边长为 2^{-k} 和 ε^k 的 2^k 个矩形，并且 E_k 在 x 轴上的射影 $\mathrm{Proj}E_k$ 包含区间$[0,2\lambda]$. 因为 $F=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$. 所以 ProjF 也包含区间$[0,2\lambda]$. 另外用映射的迭代也能说明这一点. 若 $\tilde{S}_1(x)=\frac{1}{2}x$, $\tilde{S}_2(x)=\frac{1}{2}x+\lambda$ 是两个 $\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 的映射，则 ProjF 必是 $\tilde{S}_1$ 和 $\tilde{S}_2$ 下的不变集. 而 $\tilde{S}_1$ 和 $\tilde{S}_2$ 的唯一不变集为$[0,2\lambda]$.

若 $\lambda=0$(图 4.5(b))，情况就变了. E_k 由 2^k 个左端紧靠 y 轴的边长为 2^{-k}和 ε^k 的矩形组成，E_k 包含在窄条$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2^{-k}\}$之内. 令 $k\to\infty$，则可见 F 是包含在 y 轴上的均匀康托集. 它可以看成从每个区间的正中反复去掉一长度比为 $1-2\varepsilon$ 的一段线段而得到的，于是 $D_H(F)=\log 2/-\log\varepsilon<1$.

例 4.5 把单位正方形 E_0 分割成按 $p\times q$ 排列的边长各为 $1/p$ 和 $1/q$ 的矩形. 其中 p 和 q 都是正整数且 $p<q$. 从这些矩形中选取一个子集类组成 E_1，并且用 N_j 表示从第 j 个柱集中选出的矩形数，$1\leqslant j\leqslant p$. 如图 4.6. 按通常的方法重复这个过程，即把 E_1 中的每个矩形用 E_1 的一个仿射拷贝代替. 设 F 是这一过程的极限集，则

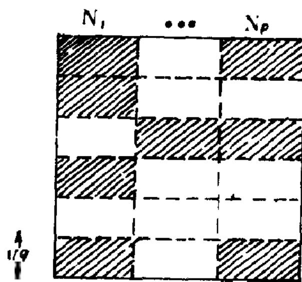


图 4.6 子集类

$$D_H(F)=\log\left(\sum_{j=1}^{p}N_j^{\log p/\log q}\right)/\log p$$

$$D_B(F)=\frac{\log p_1}{\log p}+\log\left(\frac{1}{p_1}\sum_{j=1}^{p}N_j\right)/\log q$$

其中 p_1 是至少包含 E_1 的一个矩形的柱集数.

前几步构造如图 4.7 所示. 在这个例子中，维数不仅依赖于每步选出矩形的个数，同时与它们的位置有关，而且 $D_H(F)$ 和 $D_B(F)$ 一般不相等.

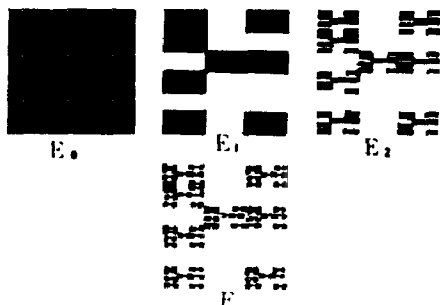


图 4.7 F 的前几步构造

上述两例是相当特殊的，对一般自仿射集的维数公式，有下述定理.

定理 4.3 设 $S_1,\cdots,S_m$ 是按(4.13)定义的仿射变换，其中 $\{T_i\}_{i=1}^m$ 是线性压缩变换，若 F 是满足

$$F=\bigcup_{i=1}^{m}(T_i(F)+b_i)$$

的仿射不变集，则 $D_H(F)=D_B(F)=d(T_1,\cdots,T_m)$ 在 mn 维勒贝格测度意义下对几乎所有的 $(b_1,\cdots,b_m)\in\mathscr{R}^{nm}$ 成立. 这里

$$d(T_1,\cdots,T_m)=\inf\{s\mid\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{J_k}\psi^s(T_{i_1}\circ\cdots\circ T_{i_k})<\infty\} \quad (4.14)$$

$$\psi^s(T)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r^{s-r+1} \quad (4.15)$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ 是线性变换 T：$\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$ 的奇异值，且 $1>\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n>0$，$0\leqslant s\leqslant n$， r 是满足 $r-1<s\leqslant r$ 的整数. J_k 是序列 $(i_1,\cdots,i_k)$ $1\leqslant i_j\leqslant m$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 组成的集.

另外，若分形集的自仿射性质只在统计意义下成立，则称为统计自仿射的.

下节我们将讨论具有统计意义的分形集——随机分形.

§3 随机分形

前两节讨论的自相似集和自仿射集都可以有相应的随机分形. 这些随机分形没有严格的自相似性和自仿射性，但是它们的非规则的形态与自然界的形貌如海岸线，起伏不平的地形地貌，云彩边界，多孔介质中的渗流等更为接近.

既然是随机分形，就应在大小不同的尺度上表现出随机性. 因此，在随机分形的几何构造过程中，每步都应引进随机成份，而为了严格地描述无穷多个构造步骤中的随机分形结构，必须使用概率论的语言.

这里我们只讨论统计自相似集和分形渗流，下节将讨论随机递归集.

一. 统计自相似集

我们首先分析随机康托集的统计自相似性. 在三分康托集的构造中,每次去掉线段中间的 1/3. 现在每次仍将线段分成三等分,但并不总是去掉中间的一段,而是用掷骰子的办法来决定去掉哪部分. 对于六面体的骰子,按 mod(3)来决定. 当余数为 0,1,2 时,则分别去掉左、中或右边的一段. 这样不断重复至极限情形,得到的随机康托集即具有统计自相似性. 即把它的每一部分放大,与整体有相同的统计分布.

随机康托集的另一构造是在每一步去掉中间一段,但留下两段的长度是随机变化的. 在第 k 步,得到 2^k 个不同长度的区间,设极限集 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$,$[0,1]=E_0\supset E_1\supset E_2\cdots$是递缩的闭集序列,$E_k$ 是第 k 步得到的 2^k 个不交的闭基本区间的并. 设 E_k 的每个基本区间 I 包含 E_{k+1} 的两个区间 I_L、I_R,且 I_L、I_R 分别与 I 有相同的左、右端点,每个区间的长度是随机的,但 $|I_L|/|I|$ 和 $|I_R|/|I|$ 独立同分布. 由此加进了统计自相似性,即 F 是统计自相似的. 对每个 I,$F\cap I$ 与 F 有相同的分布,比例变化由 $|I|$ 决定.

现在用概率论术语描述随机分形 F. 设 a,b 是常数,且 $0<a\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$,设

$$\Omega=\{\{E_k\}_{k=0}^{\infty}|[0,1]=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots\}$$

E_k 由 2^k 个不相交的闭区间 $I_{i_1\cdots i_k}$ 组成,$i_j=1$ 或 $2(1\leqslant j\leqslant k)$,如图 4.8. E_k 的区间 $I_{i_1\cdots i_k}$ 包含 E_{k+1} 的两个区间 $I_{i_1\cdots i_k1}$ 和 $I_{i_1\cdots i_k2}$,且 $I_{i_1\cdots i_k}$ 的左端点和 $I_{i_1\cdots i_k1}$ 的左端点一致,$I_{i_1\cdots i_k}$ 的右端点和 $I_{i_1\cdots i_k2}$ 的右端点一致,记

$$C_{i_1\cdots i_k}=|I_{i_1\cdots i_k}|/|I_{i_1\cdots i_{k-1}}|.$$

设对所有 $i_1,\cdots,i_k$ 有 $a\leqslant C_{i_1\cdots i_k}\leqslant b$,令 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$. 取 Ω 为样本空间,并设有概率测度 P 定义在 Ω 的子集构成的 σ-域 $\mathscr{F}$ 上,使得此

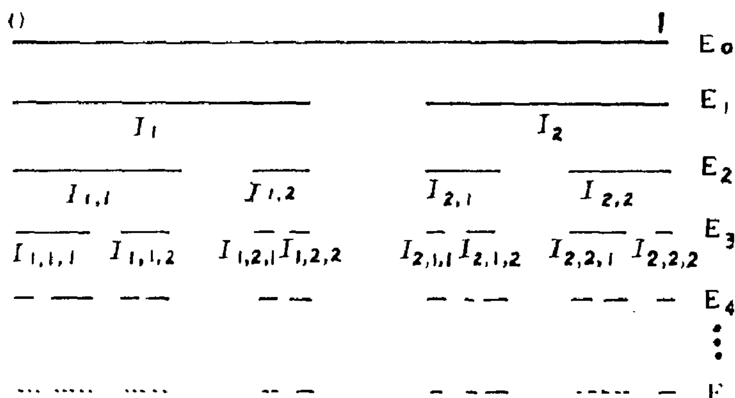


图 4.8 随机康托集的构造

值 $C_{i_1\cdots i_k}$ 是一个随机变量. 对每一序列 $i_1,\cdots,i_k$, 设 $C_{i_1\cdots i_{k1}}$ 与 $C_1=|I_1|$ 同分布. $C_{i_1\cdots i_{k2}}$ 与 $C_2=|I_2|$ 同分布. $C_{i_1\cdots i_k}1$ 与 $C_{i_1\cdots i_k}2$ 可以不独立,但 $C_{i_1\cdots i_k}$ 是独立的.则可以证明 $D_H(F)$ 是可用 $C_{i_1\cdots i_k}$ 表示的随机变量.

定理 4.4 对随机康托集 F,以概率 1 有 $D_H(F)=s$, s 是下述期望方程的解

$$E(C_1^s+C_2^s)=1 \tag{4.16}$$

上述结果是定理 4.2 和(4.11)在随机场合的翻板. 该定理可以从很多方面推广,比如 E_k 的每个区间可以产生 E_{k+1} 中的随机个具有随机长度的区间,这一构造可以推广到 $\mathscr{R}^n$ 上.

设 V 是 $\mathscr{R}^n$ 的开子集,$\overline{V}$ 是 V 的闭包,$m\geqslant 2$ 是整数,$0<b<1$. 令 $\Omega=\{\{E_k\}_{k=0}^{\infty}|\overline{V}=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots\}$. E_k 是 m^k 个闭集 $\overline{V}_{i_1\cdots i_k}$ 的并集,$i_j=1,\cdots,m$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 且 $V_{i_1\cdots i_k}$ 或者与 V 相似,或者是空集.

设对每个 $(i_1,\cdots,i_k)$, $V_{i_1\cdots i_k}$ 包含 $V_{i_1\cdots i_k i}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 且这些集不相交. 若 $V_{i_1\cdots i_k}$ 非空,记 $C_{i_1\cdots i_k}=|V_{i_1\cdots i_k}|/|V_{i_1}\cdots i_{k-1}|$ 为顺序集之间的相似比,$V_{i_1\cdots i_k}=\varnothing$,则 $C_{i_1\cdots i_k}=0$,并记 $F=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$. 设 P 是定义在 Ω 的子集构成的 σ-域上的概率测度,使 $C_{i_1\cdots i_k i}$ 与 C_i 是随机变量.

设给定 $C_{i_1\cdots i_k}>0$,即给定 $V_{i_1\cdots i_k}$ 非空,且对每一序列(i_1, …, i_k)和 $1\leqslant i\leqslant m$,$C_{i_1\cdots i_k i}$ 与 C_i 同分布. $C_{i_1\cdots i_k 1}$,…,$C_{i_1\cdots i_k m}$ 可以不独立而 $C_{i_1\cdots i_k}$ 独立,N 表示 C_1,…,C_k 中正数的(随机)个数,即 V_1,…,V_k 为非空集的个数,则有

定理 4.5 F 为非空集的概率是 q,q 是下述多项式方程的最小非负根

$$f(t)\equiv\sum_{j=0}^{m}P(N=j)t^j=t.$$

集 F 的 Hausdorff 维数和盒维数以概率 1−q 为 s. s 是下述期望方程的解

$$E(\sum_{j=1}^{m}(C_j^s))=1 \tag{4.17}$$

现在我们再讨论随机科契曲线,也可以用不同的方法来构造.一种方法是科契曲线的构造中，每次去掉中间三分之一，而用与去掉部分构成等边三角形的另两条边代替,可以用掷硬币的方法决定新的部分位于被去掉部分的“上边”或“下边”，比如正面表示上边,反面表示下边. 也可以用掷四面体骰子的办法确定,根据 mod2 的余数 0,1 决定,0 表示上边,1 表示下边,这样得到的曲线是统计自相似的,更像真实的海岸线.

另一种方法是:从单位直线段 E_0 中间去掉一随机长度为 c 的线段,(c 可取作(0,1/3)上均匀分布的随机变量),而代之以由去掉线段为底边的等边三角形的另两边形成 E_1. 对 E_1 的每一线段重复上述过程,按这种方法进行至无穷,极限曲线 F 是统计自相似的. 它是定理 4.5 的一个特例. 这时集 V 可看作底边在 E_0,高为 $\sqrt{3}/b$ 的等边三角形,在每一步,长为 L 的线段由长为 $(1-c)L/2$,cL,cL,$(1-c)L/2$ 的四条线段代替,所以 $m=4$,$c_1=c_4=\frac{1}{2}(1-c)$,且 $c_2=c_3=c$. 由于 c 在(0,1/3)上均匀分布,故(4.17)变为

$$1=E\{2[\frac{1}{2}(1-c)]^s 2c^2\}=\int_0^{1/3}3\times 2\{[\frac{1}{2}(1-c)]^s+c^s\}dc \tag{4.18}$$

或 $s+1=12\times 2^{-(s+1)}-6\times 3^{-(s+1)}$

解得 $s=D_H(F)=D_B(F)\approx 1.144$(以概率 1).

二. 分形渗流

设 $0<p<1$,把一个单位正方形 E_0 分成边长为 1/3 的 9 个正方形. 从这些正方形中选取一部分来组成 E_1,每个正方形以独立的概率 p 被选中,E_1 的每个正方形也被分成 9 个边长为 1/9 的正方形,且每一个都以独立概率 p 选出作为 E_2 的正方形. 归纳地,E_k 是一些边长为 3^{-k} 的正方形组成的随机集,极限集 $F_p=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$ 是依赖于参数 p 的随机分形,类似于渗流网络,如图 4.9.

命题 4.1 给定 p,设 $t=q$ 是下面方程的最小正解

$$t=(pt+1-p)^q \tag{4.19}$$

则 F_p 以概率 q 是空集. 若 $p\leqslant 1/9$,则 $q=1$;若 $1/9<p\leqslant 1$ 则 $0<q<1$ 并且以概率 $1-q$, $D_H(E_p)=D_B(F_p)=\log 9p/\log 3$.



图 4.9 p=0.8 的随机分形

现在讨论 p 从 0 增加到 1 时 E_p 的状态变化. 若 $0<p\leqslant 1/9$,由命题可知 F_p 必然是空集;若 $1/9<p<1/3$,则以概率 1,$F_p=\varnothing$ 或 $D_H(F_p)=\log 9p/\log 3<1$,即 F_p 是完全不连通的,这时不能产生渗流. 当 p 达到临界值 p_c 时,则渗流发生,但理论计算的 $p_c\geqslant 0.999$,这一下界似乎是不可信的. 实验认为 $0.7<p_c<0.8$. 随着 p 值的增加而超过 p_c 时,F_p 的形态戏剧性地变化,即 F_p 的孤立点突然合并形成基

本上是一个整体的部分，发生“相变”形成渗流网络.

§4 递 归 集

我们已经知道，自相似和自仿射的分形集，可以通过图形的递归或迭代而得到. 极限图形是压缩相似变换或仿射变换在迭代下的不变集. 1982 年，F. M. Dekking 推广 Manddbort 关于图形递归的思想，提出了构造分形集的一个强有力的方法. 可用来制作包括自相似和自仿射的几乎所有熟知的分形集，比如康托集及其相关结构、谢尔品斯基集合、维尔斯特拉斯曲线、填充空间的曲线等等，这一大类重要的分形集即所谓递归集.

粗略地说来，递归集由两个系统联合生成. 一个是代数系统，在一个由有限个不同符号组成的集合上生成一族符号序列，其运算是一个迭代过程. 第二个系统是将得到的符号序列嵌入到 $\mathscr{R}^n$ 中，其中每种符号对应一个单位向量，然后按照符号在序列中的顺序首尾相接，得到 $\mathscr{R}^n$ 中一条折线. 当有的符号对应空集时就得到非连通集，然后将所获折线按某种方式进行压缩. 这两个系统满足一定关系时，就得到递归集.

一. 递 归 曲 线

设 S 是有限个字母组成的集合，S^* 表示由 S 中的字母组成的长度有限的词的集合，$\forall\ W_1', W_2 \in S^*$，其乘积定义为 W_1W_2，即它们的联结. 在此运算下，S^* 为一么半群. 由 S 到 S^* 的一个同态 θ 称为 S 上的一个代换. 若 K_i 是 $\mathscr{R}^d$ 中的紧集. 将 K_i 视为 S^* 中的元素，则与 K_i 对应的词可写成 $\theta^n(W)$，θ^n 是 θ 的 n 次迭代，W 是一个词.

现在的基本问题是：给了么半群的同态 θ 和一个词 W，怎样将符号序列 $\theta^n(W)$ 和 K 结合起来，使得在豪斯道夫距离意义下，K_i

收敛于 $K_\theta(W)$？这里的 $K_\theta(W)$叫做递归集. 下面我们就来论述解决这一问题的方法.

设 G(S)是 S 生成的自由群，若 S^* 是 G(S)的嵌入，就说 G(S)从属于 S^*. 令 $\theta(s^{-1})=[\theta(s)]^{-1}, s\in S$，则$S^*$的同态将被扩充到 G(S). 考虑如下图

$$\begin{array}{ccccccc} G(S) & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{Z}^s & \xrightarrow{i} & \mathscr{R}^s & \xrightarrow{g} & \mathscr{R}^d \\ \downarrow{\theta} & & \downarrow{\theta_{ab}} & & \downarrow{\theta_{ab}} & & \downarrow{L_\theta} \\ G(S) & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{Z}^s & \xrightarrow{i} & \mathscr{R}^s & \xrightarrow{g} & \mathscr{R}^d \end{array} \tag{4.20}$$

这里 $\mathscr{Z}^s$ 是由$(\pi(s))(t)=\delta_{st}, s,t\in S$ 给定的 G(S)的可交换群，π 是 G(S)到 $\mathscr{Z}^s$ 的投射同构，θ_{ab}是诱导同态映射，i 是 $\mathscr{Z}^s$ 到 $\mathscr{R}^s\cong\mathscr{R}^r$ 的标准嵌入，这里 $r:=\mathrm{Card}S$，g 是 $\mathscr{R}^s$ 到 $\mathscr{R}^d$ 上的线性映射，$1\leqslant d\leqslant r$，L_θ 是 $\mathscr{R}^d$ 的同态，使得图(4.20)可交换.

设 $f:G(S)\to\mathscr{R}^d, f=gi\pi$，则 f 是一个同构，使得

$$f\theta=L_\theta f \tag{4.21}$$

映射 L_θ 也称作 θ 的表示，可以由 Kerg(因此也可由 $\mathscr{R}^s$ 的 θ_{ab}一不变子空间)决定，在线性等价的意义下被唯一确定.

取 θ_{ab}一不变子空间$=\{0\}$，则 $d=\mathrm{Card}S$. 取 $g=id$，则 $L_\theta=\theta_{ab}$，称 L_θ 为 θ 的完全表示.

假设 θ_{ab}有一个实特征值 λ，设 v 是对偶映射 θ_{ab}^*的对应非零特征向量，则 θ_{ab}不变子空间是$\{x\in\mathscr{R}^s\mid(x,v)=0\}$. 若 g 由 $g(x)=(x,v)$定义，则

$$f(\theta s)=(\pi\theta(s),v)=(\theta_{ab}\pi s,v)=(\pi s,\lambda v)=\lambda f(s) \tag{4.22}$$

可见在 $\mathscr{R}$ 中诱导表示是用 λ 相乘. 特别，如果 θ 是 S^* 的非平凡同态，则由 Perron－Frobenius 定理，θ_{ab}总有一个正的特征值，它大于或等于其它一切特征值的绝对值，我们称伴随的 L_θ 为 θ 的 Frobenius 表示.

设 $f:G(S)\to\mathscr{R}^d$ 是一个同构，$\mathscr{K}(\mathscr{R}^d)$ 是 $\mathscr{R}^d$ 的非空紧子集组成的集族. 任一映射 $K[\cdot]:S\to\mathscr{K}(\mathscr{R}^d)$ 都可以扩充到 S^* 的非空词. 对一切非空词 $V,W\in S^*$

$$K[VW]=K[V]\cup(K[W]+f(V)) \tag{4.23}$$

（记号 $A+y:=\{x+y\mid x\in A\},A\subset\mathscr{R}^d,y\in\mathscr{R}^d$）

这种映射的一个重要例子是由(4.23)定义的多边形映射. 对 $s\in S$

$$K(S)=\{\alpha f(s)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant 1\} \tag{4.24}$$

给定 S^* 的一个同态 θ 及 $\mathscr{R}^d$ 中的一个表示 L_θ，考虑映射 $K[\cdot]$: $S\to\mathscr{R}^d$，这里和(4.23)中的 f 都是满足(4.21)的同构.

引理 4.1 设 L 是 $\mathscr{R}^d$ 的一个同态，特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_d$，且 $|\lambda_1|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_d|$，则对 $\forall\ \lambda>|\lambda_d|$，存在一个 $c>0$ 使得对 $\forall\ v\in\mathscr{R}^d$.

$$\|L^n v\|\leqslant c\lambda^n\|v\|\quad(n=1,2,\cdots) \tag{4.25}$$

若 $\mathscr{R}^d$ 的一个同态 L 的所有特征值的模都大于 1，则称 L 是扩张映射. G (S) 的一个同态 θ 叫做零自由的 (null－free)，如果 $\forall\ s\in S,\theta(s)\neq\varepsilon$($\varepsilon$ 表示空词)，利用引理，可以证明如下定理成立.

定理 4.6 设 θ 是 S^* 的零自由同态，L_θ 是 θ 的扩张表示，则对任意非空词 W，存在一个紧集 $K_\theta(W)$ 使得 $n\to\infty$ 时，在豪斯道夫距离意义下

$$L_\theta^{-n}K[\theta^n W]\longrightarrow K_\theta(W)$$

且 $K_\theta(W)$ 是不依赖于 $K[\cdot]$ 的选择的一条曲线，称作递归曲线.

关于定理 4.6，以下几点值得注意：

1°. 定理中 L_θ 是扩张的这一条件是必要的. 若 L_θ 有模小于 1 的特征值，则从引理 4.1 可知 $L_\theta^{-1}K[\theta^n W]$ 不收敛，其余情形的收敛性依赖于 W. 例如 $S=\{a,b\}$，θ 定义为 $\theta(a)=ab,\theta(b)=b$，L_θ 是 θ 的完全表示，则对 $\forall\ n,L_\theta^{-n}K[\theta^n b]=K[b]$，但 $L_\theta^{-n}K[\theta^n a]$ 不收敛.

2°. 除去由 $\mathscr{R}^d$ 的 θ_{ab}—不变子空间确定的 $\mathscr{R}^d$ 的一个自同构外，递归曲线 $K_\theta(W)$ 是由其表示 L_θ 唯一决定的. 事实上，设 L_θ 和

L_θ'是两个这样的表示：$f\theta=L_\theta f$，$f'\theta=L_\theta' f'$，则对非奇异映射 T：$\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}^d$，$f'=Tf$ 且 $L_\theta'=TL_\theta T^{-1}$，由 T 是线性的有，对任意非空的 $V\in S^*$，$K'[V]=TK[V]$，因此，由 T 的连续性，

$$
\begin{aligned}
K_{\theta'}(W) &= \lim_{n\to\infty} L'_\theta{}^{-n} K'[\theta^n W] \\
&= \lim_{n\to\infty} TL_\theta^{-1} K[\theta^n W] = TK_\theta(W) \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

3°. 定理 4.6 可以推广. 设 $\{\theta_n\}$ 是 S^* 的零自由同态序列，其中只存在有限多个不同的 θ_n，且使得所有 θ_n 有相同的扩张表示 $L=L_{\theta_n}$，则当 $n\to\infty$ 时，

$L^{-n}K[\theta_n\cdots\theta_2\theta_1(W)]\to K\theta_n(W)$.

$K_{\theta_n}(W)$仍为一递归曲线.

4°. 若考虑 G(S)的同态，则由于相约性，(4.23) 一般无意义. 这时，在定理 4.6 中要考虑 G(S)的具有短程相约性的同态. 此处不深入讨论，有兴趣的读者可参考 F. M. Dekking 的论文(参考文献 3).

5°. 设 θ,η 是 S^* 的同态. $\theta\eta$ 为其复合同态，若 θ_{ab}，η_{ab}在 $\mathscr{R}^s$ 中具有公共的不变子空间，则这个子空间在$(\theta\eta)_{ab}$下是不变的，而且我们可以选取 θ,η 和 $\theta\eta$ 的表示使得 $L_{\theta\eta}=L_\theta L_\eta$. 若 L_θ，L_η 和 $L_{\theta\eta}$是扩张的. 则考虑 $K_\theta(W)$、$K_\eta(W)$和 $K_{\theta\eta}(W)$之间的关系是有意义的. 特别，L_θ 是扩张的当且仅当对 $k\geq1$，L_{θ^k}是扩张的，而且

$$K_{\theta^k}(W)=K_\theta(W) \qquad k\geq1$$

它给出了递归曲线的其它不变性质.

二. 递归集及其维数

上面对递归曲线的讨论可以推广. 设 $K[\cdot]:S^*\to\mathscr{K}_0(\mathscr{R}^d)$ 仍是满足(4.23)的映射，$\mathscr{K}_0(\mathscr{R}^d)$是 $\mathscr{R}^d$ 的紧子集组成的集族. 对于空词 ε，令 $K[\varepsilon]=\varnothing$. 使得 $K[s]=\varnothing$的字母 s 称为虚元.

设 Q 是 S 的子集，称 S^* 的一个同态 θ 是 Q－稳定的，如果存

在 $m\geqslant 0$ 使得对$\forall\ s\in S$,下列之一成立

(Ⅰ)$\theta^k s\in Q^*$　对 $k\geqslant m$

(Ⅱ)$\theta^k s\notin Q^*$　对 $k\geqslant m$

如果 Q 是虚元的集合,则满足(Ⅱ)的字母叫做本质元.

命题 4.2　Ⅰ)若 Q^* 是 θ—不变的,则 θ 是 Q—稳定的.

Ⅱ)若 θ 是混合的,即若对某个 m,S 的全部符号都出现在 $\theta^m s, s\in S$ 的每一个词中,则 θ 是 Q—稳定的.

定理 4.7　设 θ 是 S^* 的一个同态,L_θ 是 θ 的一个扩张表示.映射 $f:S^*\to\mathscr{R}^d$,满足(4.21),且 $K[\cdot]:S^*\to\mathscr{K}_0(\mathscr{R}^d)$是满足(4.23)的映射.设 $Q=\{s\in S|K[s]=\varnothing\}$,假设 θ 是 Q—稳定的.则对至少包含一个本质元的任意词 W,存在非空紧集 K_θ(W),使得 $n\to\infty$时在 Hausdorff 距离的拓扑意义下

$$L_\theta^{-1}K[\theta^n W]\to K_\theta(W)$$

定理 4.7 中的集 $K_\theta(W)$即称为递归集.

与递归曲线定理一样,对递归集可作类似于 1°～5°的讨论.

递归集的范围广泛,它包括几乎所有熟知的分形集.正因为如此,确定递归集的维数是一个非常困难的问题.1982 年,Dekking 获得维数上界

$$D_H(K_\theta(W))\leqslant d-1+\frac{\log\lambda_{max}-\sum_{j=1}^{d-1}\log|\lambda_j|}{\log|\lambda_d|} \qquad (4.27)$$

其中$|\lambda_1|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_d|$是 L_θ 的特征值的模,λ_{max}是 θ_{ab}的最大特征值.但要得到(4.27)中的等式却存在着各种各样的障碍,因此,维数的确定是相当困难的.

1989 年,钟红柳运用完全不同于 Dekking 和 Bedford 的方法,证明了如下结果.

设 S 是一个有限字母的集合,S^* 是S生成的自由半群,$\theta:S^*\to S^*$ 是自同态.$f:S^*\to\mathscr{R}^d$是同态,Q与E分别是S中的虚

元与本质元的集合，θ具有扩张表示L，θ为Q一稳定且本质混合. $s\in S$，$s\overline{\in}Q$，则递归集 K_θ（s）的维数满足

$$a_0/p_1\leqslant D_H(k_0(s))\leqslant a_0/p_2 \tag{4.28}$$

式中 a_0 由下式决定

$$\liminf_{n\to\infty} M_d(K^\varepsilon(\theta^n(s)))/b^{a(s)n}=\begin{cases}\infty & \forall\ a(s)<a_0,\forall\ s\in E\\ 0 & \forall\ a(s)>a_0,\forall\ s\in E\end{cases}$$

这里 $M_d(K^\varepsilon(\theta^n(s)))$ 表示集 $K^\varepsilon(\theta^n(s))$ 的测度.

$p_1=\max\{p_1(s)\mid s\in E\}$

$p_2=\min\{p_2(s)\mid s\in E\}$

$p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 满足下式

$$\liminf_{\lambda\to} \lambda_E^{np}\|L^{-n}f(s)\|=\begin{cases}\infty & \forall\ p>p_1(s)\\ 0 & \forall\ p<p_1(s)\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_E^{np}\|L^{-n}f(s)\|=\begin{cases}\infty & \forall\ p>p_2(s)\\ 0 & \forall\ p<p_2(s)\end{cases}$$

进一步可给出更好的维数上限

$$D_H(K_\theta(s))\leqslant a_0\log\lambda_E+\sum_{i=1}^{d}\log|\lambda_d/\lambda_i|/\log|\lambda_d| \tag{4.29}$$

获得这一结果的主要思想是：设 J_n 表示 $\mathscr{R}^d$ 内与 K_θ（θ^n（s））相交但彼此不交的具有相同半径的球的个数. 若 $\{U_i\}$ 为 K_θ（s）的一组复盖，则 $\{L^nU_i\}$ 为 K_θ（θ^n（s））的一组复盖，从中选出某个 K_θ（s）$+\alpha$，考虑从 $\{L^nU_i\}$ 中选出的 K_θ（s）$+\alpha$ 的子复盖，记为 $\{V_i\}$，则 $\sum|U_i|^\beta$ 与 $\sum|V_i|^\beta$ 之间通过 J_n、a_0、p_1、p_2 联系，得到不等关系. 从正反两方面使用这种递归手段，可以导出结果.

三. 递归集的例子

对某个 $W\in S^*$，在下述的例子中，K_n（W）总表示 $L_0^{-n}K$ $[\theta^nW]$. 若无特别声明，K[·]表示(4.23)的多边形映射.

例 4.6 Peano 曲线

设 θ 是 G({a,b})的同态，定义为

$$a \to aba,\quad b \to b^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

其完全表示有特征值 $\pm\sqrt{3}$，则递归曲线是熟知的 Peano 曲线.

$\{a,b,c,d\}^*$ 的同态定义为

$$a \to aba,\quad b \to dcd,\quad c \to bab,\quad d \to cdc$$

它具有由 $f:\{a,b,c,d\}^* \to \mathscr{H}^3$ 诱导的表示. f 的定义为

$$f(a)=(1,1,1),\qquad f(b)=(-1,-1,1)$$
$$f(c)=(1,-1,-1),\qquad f(d)=(1,1,-1)$$

它生成填充正方形的曲线，如图 4.10 所示.

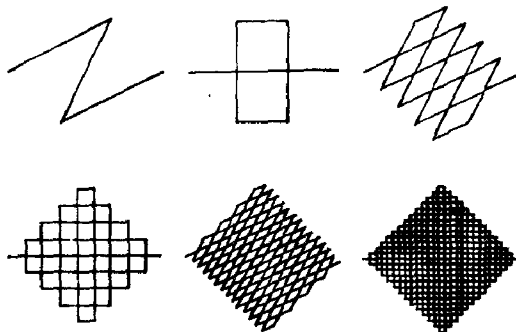


图 4.10 Peano 曲线的前 6 次逼近

例 4.7 设 θ 是 $\{a,b\}^*$ 的同态，其定义为

$$a \to abbb,\ b \to baaa$$



图 4.11 处处连续但不可微的曲线，前 5 次逼近

L_θ 是由 $f(a)=(1,1)$,$f(b)=(1,-1)$诱导的表示，则 $K_\theta(a)$是处处连续但不可微的曲线，如图 4.11 所示. 其维数 $D_H(k_\theta(a))\leqslant 3/2$.

例 4.8 龙的边界曲线

设 θ 是 $G(\{a,b\})$的同态，定义为

$$a\to ab,\quad b\to a^{-1}b$$

设 L_θ 是 θ 的完全表示，曲线 $K_\theta(aba^{-1}b^{-1})$是 $K_{\theta'}(abcd)$的边界，θ'是下一个例子中的同态. 该曲线的维数是 $2\log\lambda/\log 2$，而 λ 是方程 $\lambda^3-\lambda^2-2=0$ 的唯一实根. 图 4.12 示出了该曲线的第 0,4,8 次逼近.

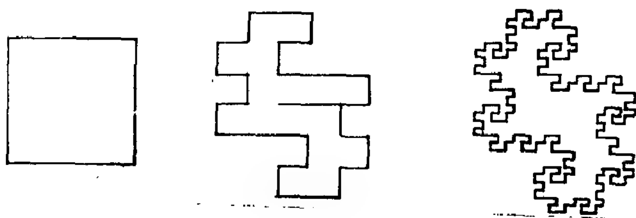


图 4.12 龙的边界 $Kn(aba^{-1}b^{-1})$, n=0,4,8.

例 4.9 Heighway 龙曲线

设 $S=\{a,b,c,d\}$，θ 定义为

$$a\to ab,\quad b\to cb,\quad c\to cd,\quad d\to ad$$

则 $V_{sq}:\{(x,y,x,y)\mid x,y\in\mathscr{R}\}$是 θ_{ab}—不变的. 定义

$$f_{sq}:S^*\to\mathscr{R}^2$$

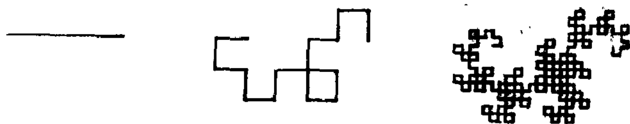


图 4.13 Heighway 龙曲线 $Kn(a)$, n=0,4,8.

$$f_{sq}(a)=(1,0)=-f_{sq}(c),\quad f_{sq}(b)=(0,1)=-f_{sq}(d)$$

它的伴随同态 L_θ 具有特征值 $1\pm i$.

这样得到的递归曲线是熟知的龙曲线，它是 J. F. Heighway 在 1960 年左右发现的. 其 0,4-8 次逼近如图 4.13 所示.

令 $\theta_0=\theta$， 设 θ_1 定义为

a→ba， b→bc， c→dc， d→da

显然 θ_1 与 θ_0 有相同的表示. 由注记 3°)，使 $\varepsilon(n)=0$ 或 1，任何序列 $\varepsilon(n)$ 决定一条曲线 $K(\theta_{\varepsilon(n)})(a)$. 曲线 $K[\theta_{\varepsilon(n)}\cdots,\theta_{\varepsilon(2)}\theta_{\varepsilon(1)}(a)]$，已为 Davis(1970 年)和 Mendes(1981 年)等所研究.

例 4.10 令 $S=(a,b,c,d)$，θ 定义为

a→abadadab， b→cbcbadab， c→cbcbcdadcbcd， d→adcd

V_θ 是 θ_{ab}一不变的. 对应表示的特征值有不同的模，$K_\theta(W)$ 有非空的内部. 它填充一平面区域，如图 4.14 所示. 对任意非空词 W，$D_H(k_\theta(W))=2$.



图 4.14 填充平面区域的曲线，前 6 次逼近

例 4.11 Hilbert 曲线

设 $S=\{a,b,c,d\}$，令 σ 是 S^* 的自同构，定义为

$\sigma(a)=b$， $\sigma(b)=c$， $\sigma(c)=d$， $\sigma(d)=a$.

设 τ 是 S^* 的反序映射(reversal map)，定义为

$\tau(s)=s$， $\tau(VW)=\tau(W)\tau(V)$， $V、W\in S^*$

S^* 的同态定义为

$a\to baad$， $\sigma\tau\sigma=\theta\sigma\tau$

则 V_{sq} 是 θ_{ab}—不变的. 令 f_{sq} 按例 4.9 定义，$K[\cdot]$ 是多边形映射. 尽管逼近曲线 $L_\theta^{-n}K[\theta^n a]$ 不同于 Hilbert 绘制的曲线，但不难看出它们收敛于填充同一正方形的曲线 $K_\theta(a)$，如图 4.15 所示.

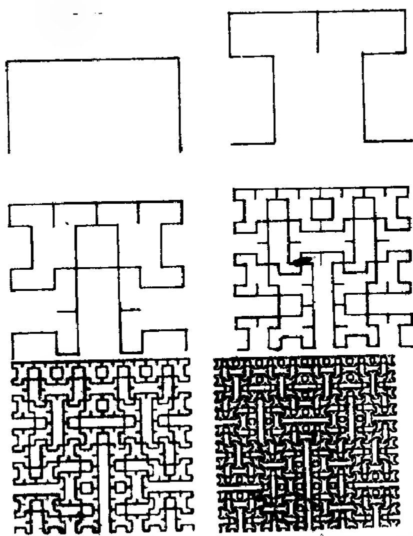


图 4.15 Hilbert 曲线 $K_\theta(a)$，前 6 次逼近

例 4.12 Ter 龙

设 $S=\{a,b,c\}$，设 θ 定义为

$a\to aba$， $b\to bcb$， $c\to cac$.

同构 $f:S^*\to\mathscr{R}^2$，定义为

$$f(a)=(1,0),\quad f(b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}),\quad f(c)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3})$$

确定了一个扩张表示，这条曲线叫做六角形蛇皮. Giler 等(1979

年)也构造了这一曲线.

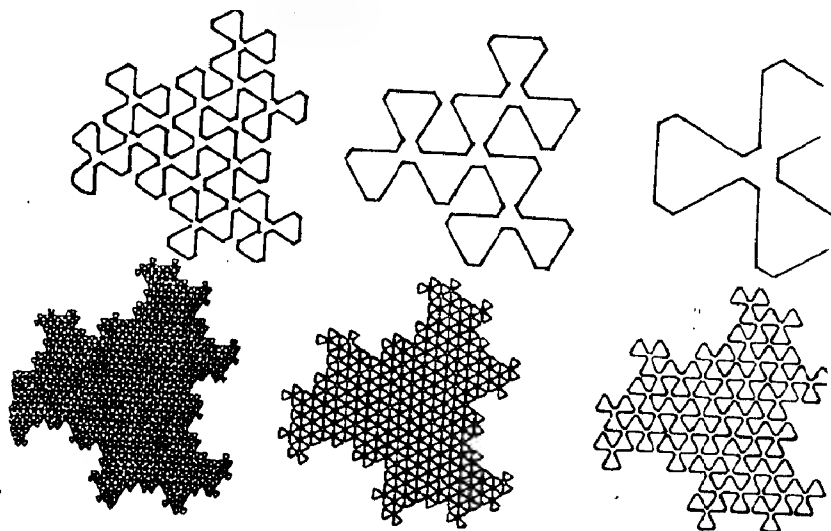


图 4.16 Ter 龙,前 6 次逼近

例 4.13 Koch 曲线

设 $S=\{n,o,s,w,n',o',s',w'\}$,$\theta$ 定义为

$n\to no'sn$, $o\to own'o$, $s\to snow$, $w\to snow$, $\theta\rho=\rho\theta$.

这里$\rho t=t'$,$\rho t'=t$. 当$t=n,o,s,w$时,由$f(s)=f(w)=(1,0)$,

$f(n)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$,$f(o)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$,$f(t')=-f(t)$定义的同构 f 决定一个扩张表示(用 3 作相似倍数). $K_\theta(s)$就是众所周知的 Von,Koch 曲线.

例 4.14 广义 Koch 曲线

设 $S=\{s_{ij}|i=0,1;j=0,1,\cdots,5\}$,设 $\sigma:S^*\to S^*$ 定义为

$$\sigma(s_{ij})=s_{i,j+1}\qquad(\mathrm{mod}6)$$

设 θ 定义为

$$s_{00}\to s_{00}s_{11}s_{15}s_{00},\quad s_{10}\to s_{10}\theta(s_{01}s_{05})s_{10},\quad \theta\sigma=\sigma\theta$$

同构 $f:S^*\to\mathscr{R}^2$ 定义为

$$f(s_{ij})=(i+1)(\omega s\pi j/3,\sin\pi j/3)$$

确定一个扩张表示. 递归曲线为 $K_\theta(s_{00})$. Mandelbrot(1977 年)曾以另一种不同的方式定义这一曲线. 其维数 $D_H(K_\theta(s_{00}))=\log(4+2\sqrt{3})/\log4\approx1.45$. 其 1, 2, 6 次逼近如图 4.17 所示.

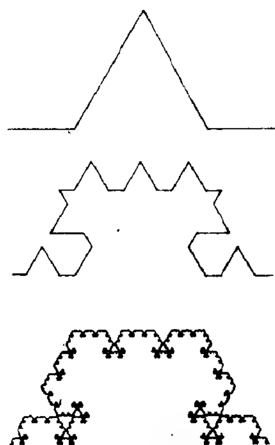


图 4.17 广义科契曲线 1,2,6 次逼近

例 4.15 Julia 曲线

设 $S=\{s_{ij}|i=0,1,2;j=0,1,\cdots,5\}$, σ 为例 4.14 所定义. 设同态 θ 由 $\theta\sigma=\sigma\theta$ 所定义, 且

$$s_{00}\to s_{20}s_{02}s_{00}s_{04}s_{20};\ s_{10}\to\theta(s_{00})s_{12}s_{10}s_{14}\theta(s_{00})$$

$$s_{20}\to\theta(s_{10})s_{22}s_{20}s_{24}\theta(s_{10})$$

$$f(s_{ij})=2^i(\cos\pi j/3,\sin\pi j/3)$$

定义一个同构且确定一个扩张表示. 递归曲线 $K_\theta(s_{01}s_{02}s_{00}s_{04}s_{05}s\ )$, 如图 4.18 所示. Julia 早在 1918 年就考虑过这一曲线. 其维数为 $\log\lambda/\log8$, 这里 λ 是方程 $\lambda^3-17\lambda^2+27\lambda-27=0$ 的唯一实根.

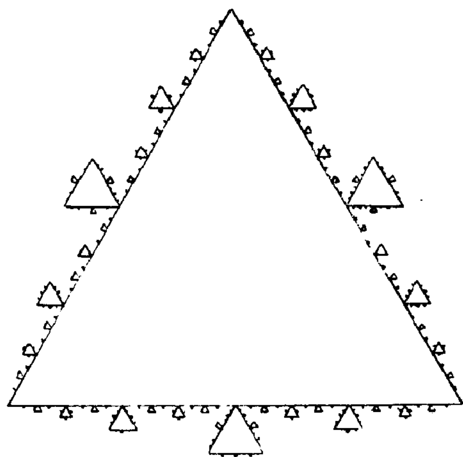


图 4.18 Julia 曲线的一部分, 另一部分与它对称

例 4.16 Cantor 集

设 $S=\{a,\bar{a}\}$, θ 定义为

$$a\to a\bar{a}a,\quad \bar{a}\to\bar{a}\bar{a}\bar{a}$$

L_θ 是 θ 的 Frobenius 表示. $f(a)=f(\bar{a})=1$. $K[\cdot]$ 由(4.23)决定且 $K[a]=[0,1]$, $K[\bar{a}]=\varnothing$, 则虚元

集等于$\{\bar{a}\}$. 由命题 4.2（ⅰ）和定理 4.7, $L_\theta^{-n}K[\theta^n a]$收敛于一非空紧集. 它恒同于 Cantor 集, $D_H(K_\theta(a))=\log2/\log3$.

例 4.17 Sierprinski 万有平面曲线

设 $S=\{s_i,\bar{s}_i|i=0,1,2,3\}$, σ 定义为 $\sigma t_i=t_{i+1} \bmod (4)$，其中 $t_i=s_i$ 或 $\bar{s}_i$, θ 定义为 $\theta\sigma=\sigma\theta$, 且

$$s_0\to s_0s_1s_0s_3\bar{s}_2s_3s_0s_1s_0,\quad \bar{s}_0\to\bar{s}_0\bar{s}_0\bar{s}_0$$

同态 f 定义为 $f(s_i)=f(\bar{s}_i)=(\cos\pi i/2,\sin\pi i/2)$, $i=0,1,2,3$, 它确定了 $\mathbb{R}^2$ 中 θ 的扩张表示. 选择 $K[\cdot]$, 使$\{\bar{s}_i\}$是虚元的集合, 则递归集 $K_\theta(s_0)$是熟知的 Sierpinski 万有平面曲线. 如图 4.19 所示. 其维数 $D_H(K_\theta(s_0))=\log8/\log9$.

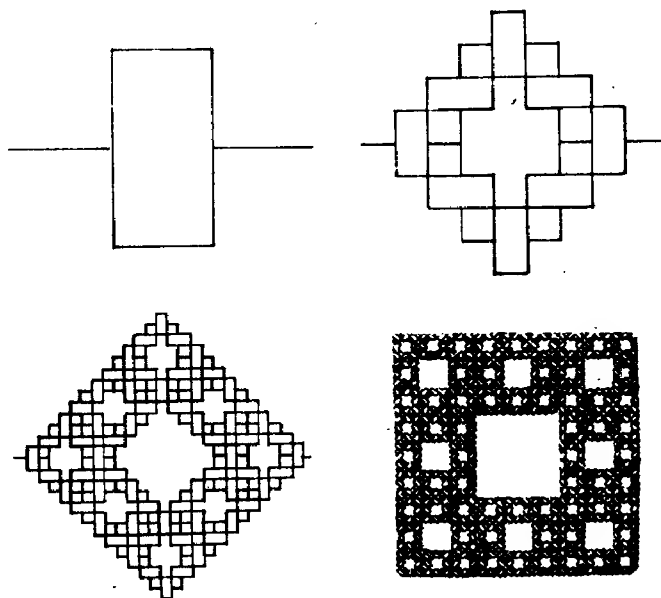


图 4.19 Sierpinski 万有平面曲线 $K_n(s_0)$, $n=1,2,3,4$.

令 $S_R=\{s_0,s_1,s_2,s_3\}$, $\eta: S_R\to S_R$ 定义为 $\sigma\eta=\eta\sigma$ 且 $\eta(s_0)=$

$s_0s_1s_1s_3s_3s_2s_1s_3s_0s_1s_0$，则 $K_\theta(s_0)$的实现为一递归曲线 $K_\eta(s_0)$. 它具有不可数多个二重点.

还有一些递归集的例子，如 Gosper 曲线，Golomb 蜗牛，拓扑 Markov 集，Penrose 模型等就不一一介绍了. 由此我们看到，递归集既包括了自相似集和自仿射集，还包括了下节我们将要介绍的胖分形集.

四. 随机递归集与复合递归集

1989 年，武汉大学文志英等将 Dekking 递归集的机制随机化，研究了相应随机过程的性质，并讨论了由此产生的随机分形集及其维数.

设 $a\in s$，$W\in S^*$，$|W|_a$ 表示字母 a 出现在词 W 中的个数.

$$m_{ab}(\theta)\triangleq|\theta(a)|_b,\quad a,b\in S$$

$$M(\theta)\triangleq(m_{ab}(\theta)),\quad a,b\in S$$

$M(\theta)$称为 θ 的代换矩阵.

设(Ω,F,P)为一概率空间，$\{\theta\}_n\geqslant 1$ 为 S 上一列独立同分布的随机代换，$\omega\in\Omega$，a，e(4.21)式成立，即 $f\circ\theta_1(\omega)=L_{\theta_1}(\omega)\circ f$，此外假定 $\theta_1(Q^*)\subset Q^*$，若 $a\notin Q$，则 $\theta_1(a)\notin Q^*$.

记$X_n=\theta_n\circ\theta_{n-1}\circ\cdots\circ\theta_1$，$S_n=L_{n_\theta}L_{\theta_{n-1}}\cdots L_{\theta_1}$，$T_n=M_{\theta_n}\cdots M_{\theta_1}$. λ 与 τ 分别为随机矩阵乘积 S_n 与 T_n 的最大 Lyapumov 指数(见第五章§5)，文志英等得到如下结果

定理 4.8 设 $E\log^+|\theta_1|<\infty E\log^+\|L_{\theta_1}^{-1}\|<\infty$(E 代表数学期望)，$\lambda,\tau>0$ 且 $Q=\varnothing$，则$\forall\ W\in S^*$，存在紧集 $K_\theta(W)$使得在 Hausdorff 度量下，几乎必然有

$$S_n^{-1}K[X_n(W)]\to K_\theta(W)\qquad n\to\infty$$

且 $K_\theta(W)$为不依赖 K[·]选择的连续曲线.

定理 4.9 其余条件同前. 若 $Q\neq\varnothing$，词 $W\in S^*$至少包含一个本质元，则存在非空紧集 $K_\theta(W)$，使得在 Hausdorff 度量下

$$S^{n-1}K[X_1(W)] \to K_\theta(W) \quad n\to\infty$$

定理 4.10 条件同前，则

$$D_H(K_\theta(W)) \leqslant \tau/\lambda$$

李家龙等引入复合代换的概念，由此导出复合递归集.这类集包含了 Dekking 的递归集，同时还可以生成新的分形集.记 $|W|=n$ 为词 W 的长度，空词 q 的长度记为 0，记 $\sum=\{\theta_1,\theta_2|\theta_i$ 为 S 上的代换，$i=1,2\}$.

设 $\sigma:\sum\to\sum^*$ 是 $\sum$ 上的代换，设 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\sum$，定义复合代换 $\theta_1\cdots\theta_n:S\to S^*,a\to\theta_1(\theta_2\cdots\theta_n(a))$. 定义反射 $(\cdot)^R:\sum^*\to\sum^*,(\theta_1\cdots\theta_n)^R=\theta_n\cdots\theta_1$，则

$\{\sigma_n(\theta_1)^R(W)|W\in S,n\in N\}\subset S^*$ 为一列由复合代换生成的词，运用它们可以生成复合递归集.

设 $\theta\in\sum$，记代换矩阵 $M_\theta=(m_{w_1w_2}),w_1,w_2\in S$，其中 $m_{w_1w_2}$ 为词 $\theta(w_1)$ 中出现的 W_2 的个数.

命题 4.3 设 $M_{\theta_1},M_{\theta_2}$ 是本质的，并有一个相同的左特征向量，则

$$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}[L_W((\sigma^n(\theta_1))^R(u))]/(\lambda_1^d d_{\theta_1}^{\lambda_F^n}*\lambda_2^{d_{\theta_2}\lambda_F^n})$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}[L_W((\sigma^n(\theta_1))^R(u))]/(\lambda_1^d d_{\theta_1}^{\lambda_E^n}*\lambda_2^{d_{\theta_2}\lambda_E^n})<+\infty$$

其中 $W\in S,u\in S^*$，$L_W(W)$ 表示词 W 中出现 W 的个数，λ_E 为代换矩阵 M_σ 的最大特征值，d_{θ_i} 为 θ_i 在 $\sigma^n(\theta_1)$ 中出现的密度，λ_i 为代换矩阵 M_{θ_i} 的最大特征值，$i=1,2$.

设 $f:S\to\mathscr{R}^d(d=1,2)$，则 f 可延拓为 S^* 到 $\mathscr{R}^d$ 上的同态.设对任意 θ_i，存在线性映射 $L_{\theta_i}:\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}^d$ 使得 $L_{\theta_i}\circ f=f\circ\theta_i$.

定理 4.11 设 θ_1,θ_2 不映射到空词，$L_{\theta_1},L_{\theta_2}$ 是扩张映射，则对任意非空词 W，存在紧子集 $K_\theta(W)$ 使得在 Hausdorff 度量下

$$\lim_{n\to\infty}(L(\sigma^n(\theta_1)^k))^{-1}K[(\sigma^n(\theta_1))^k(W)]=K_\sigma(W)$$

并且 $K_\sigma(W)$ 与 $K[\cdot]$ 的选择无关，是一曲线，称之为复合递归曲线.

上述结论还可推广到任意的字母集上.

§5 胖 分 形

近年来，人们在一些非线性动力学系统中发现了一类重要的奇异集合，称作胖分形(fat fractal). 本节将介绍有关胖分形的几个问题.

一. 胖分形与分形指数

胖分形是指有分形边界且 Lebesgue 测度不为零的集. 这一概念是昂伯格(D. K. Umberger)和法默(J. D. Farmer)在 1985 年首先提出的.

胖分形的勒贝格测度为非零有限值，维数为整数且与所在欧氏空间维数相等. 因此，分维已不是描述胖分形的敏感参数，通常需引入胖分形指数来刻画它.

设一迭代过程的不变集为一胖分形 F，其所有尺寸小于 ε 的孔所构成的粗粒集记作 A_ε. 则对每一个充分小的 ε，A_ε 的勒贝格测度(面积)

$$\mu(A_\varepsilon)=\mu_0+f(A_\varepsilon) \tag{4.30}$$

其中 $\mu_0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu(A_\varepsilon)$ 是极限集 F 的勒贝格测度. 而 $\mu(A_\varepsilon)>\mu_0$，因此，这一测度可用来刻画胖分形. 目前，已有刻划胖分形的几个标度指数. 一个指数 β 由下述标度特征定义.

$$\mu(A_\varepsilon)=\mu_0+A_\varepsilon^{\beta} \tag{4.31}$$

这种情形，标度指数

$$\beta=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln f(A_\varepsilon)/\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\mu(A_\varepsilon)-\mu_0|/\ln\varepsilon.$$

上式提供了刻画胖分形的一个有用参数. 当幂律关系(4.31)不成立时,上式仍能产生一个有用的数β. 例如,当 $\mu(A_\varepsilon)=\mu_0+\varepsilon|\ln\varepsilon|$ 或 $\mu_0+1/|\ln\varepsilon|$ 或 μ_0+e^{-1}/ε 时,可以得到β分别等于 0 或∞. 所以β的变化范围为 $0\leqslant\beta\leqslant\infty$. 对于非分形, $\beta=\infty$;对瘦分形,$\mu_0=0$. 这时 $\mu(A_\varepsilon)=A_\varepsilon^\beta$,$f(A_\varepsilon)\sim\varepsilon^{d-D_f}$,d 是 F 所嵌入的欧氏空间的维数,$D_f<d$,这表明β是集的分形余维数. 因此,对胖分形,产生不同的分形指数,每一种都可看作对应分维的推广.

格里波基(C. Grebogi)等采用了另一方法来定义粗粒集,其实质是闵可夫斯基密度,在瘦分形的情形对应容量维.

设 S 是一集合,S(ε)表示用 ε 加胖 S 生长成的集,它是原集加上与 S 的距离不超过 ε 的所有点组成的集合,即

$$S(\varepsilon)=S\cup\{x\,|\,d(x,S)\leqslant\varepsilon\} \tag{4.32}$$

它就是第三章定义的闵可夫斯基"香肠". 令 $\bar{S}(\varepsilon)=S(\varepsilon)\backslash S$ 表示从胖集 S (ε) 中削去原集 S 后所剩部分 (即长胖部分), $\mu[\bar{S}(\varepsilon)]$ 表示 $\bar{S}(\varepsilon)$ 的 d 维勒贝格测度, 其外容量维数定义为

$$d_x=\lim_{L\to\infty}\ln\mu[\bar{S}(\varepsilon)]/\ln\varepsilon. \tag{4.33}$$

描述胖分形的另一指数 α 由下式定义

$$\alpha=d-d_x=d-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\mu[\bar{S}(\varepsilon)]/\ln\varepsilon \tag{4.34}$$

$0\leqslant\alpha\leqslant d$. 它在描述分形集边界的性质时起着容量维作用.

1986 年,法默和昂伯格将胖分形所在的 d 维空间划分成大小为 ε 的网格,通过含有胖分形中点的所有 d 维"方块"和网格标度,给出了胖分形的另一指数 γ,$0\leqslant\gamma\leqslant d$. 它对应于瘦分形的盒维数.

根据β的定义,似乎只对有孔这一类分形结构的集才是可用的,而 α 与 γ 对任意集有定义(如分形河流结构). 实际上β对任意集合也是有定义的.

给定一个分形集，可能有的指数比别的指数更易求得．另一问题是，在研究胖分形集的性质时，哪个参数“更好”？要解决这些问题，有必要对三个指数进行比较，找出它们之间的关系．1986 年，依克荷特(R. Eykholt)等得到如下结果．

命题 4.4 在 $\mathscr{R}^d$ 中的任意胖（或瘦）分形，$\gamma=\alpha$．

这一结果说明 α 和 γ 是相同的分形指数，在研究胖分形的这两个指数时，只要求出其中之一就行了．

为了求出 α 与 β 间的关系，将（4．30）式改记作 $\mu_\beta(A_\varepsilon)=\mu_0 f(A_\varepsilon)$．另一方面，若用 $\varepsilon/2$ 加胖集 A_ε，它将使半径大于 ε 的孔收缩，增加的测度记作 $g(A_\varepsilon)$，则 $\mu_\alpha(A_\varepsilon)=\mu_0 f(A_\varepsilon)+g(A_\varepsilon)$，由此

$$\alpha=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln[f(A_\varepsilon)+g(A_\varepsilon)]/\ln\varepsilon$$

若我们令

$$\bar{\beta}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln g(A_\varepsilon)/\ln\varepsilon$$

则 $0\leqslant\bar{\beta}\leqslant d$．且可以得到

命题 4.5 对 $\mathscr{R}^d$ 中任意胖（瘦）分形，$\alpha=\min\{\beta,\bar{\beta}\}\leqslant\beta$．

从上述命题可得到两个重要结论．首先它确定了 $\alpha\leqslant\beta$；第二，它说明或 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha=\bar{\beta}$．因此，当 α 与 β 不同时，β 由小孔决定，而 α 由大孔决定，对 $\mathscr{R}^d$ 中的胖（或瘦）分形，还可以给出更细致的结果．

二．胖分形的几个例子

例 4.18 具有胖分形特征的康托尘集和康托曲线．

最近，汪富泉和李后强构造了一类具有胖分形特征的康托尘集并计算了它们的分形指数，由此讨论了康托曲线即平面上有面积的曲线的胖分形特征．

设 $I=[0,1]$ 表示单位区间．像构造经典的三分康托集一样，第一步，将 I 分成三段，其长度为 $\frac{1}{2}(1-\lambda)$，λ，$\frac{1}{2}(1-\lambda)$（λ 为任一

常数，$0<\lambda<\frac{1}{2}$）．去掉中间长度为λ的一段，得到的两条线段记作I_1．第二步，将I_1中每一直线分成三段，对应长度为$\frac{1}{4}(1-\lambda-\lambda^2)$，$\frac{1}{2}\lambda^2$，$\frac{1}{4}(1-\lambda-\lambda^2)$．去掉各自中间的一段，其长度之和为$\lambda^2$，留下的四条线段记作$I_2$．设$I_{j-1}$已经作成．归纳地，第j步，从$I_{j-1}$的每一线段中去掉中间长为$2^{-(j-1)}\lambda^j$的一段，去掉线段长度之和为$\lambda^j$，得到的集$I_j$，由$2^j$条长度为$(1-\sum_{i=1}^{j}\lambda^i)/2^j$的线段组成，$j=1,2\cdots$．显然$I_j\supset I_{j+1}$，$j=0,1,2,\cdots$．极限集$I=\bigcap_{j=0}^{\infty} I_j$．$j\to\infty$时，$I_j$中线段的长度趋于0．由I的构造知，I与经典三分康托集是拓扑等价的．即它们有完全不连通、紧致不可列、非稠密、自稠密等拓扑性质．但是，两集的几何性质却有很大差异，经典三分康托集勒贝格测度为0，分维为ln2/ln3．而I有正的有限勒贝格测度

$$\mu(I)=1-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=1-\frac{\lambda}{1-\lambda}=1-2\lambda>0$$

$D_f(I)=1$．由此知I是一个胖分形集．

这类集可以推广到$\mathscr{R}^d$中更一般的情形．设B_0是单位d维立方块（d=1,2,3时，分别对应单位区间，单位正方形和单位立方块）．从B_0中除去d个形状相同，体积相等的d维长方体．$d\geqslant 2$时，这些d维长方体两两正交，其交集为一d维立方体，（d=2时，割去部分组成一个十字带，d=3时，割去部分就像三个正四棱柱作成的空间直角坐标系）．挖去部分体积之和为σ，$0<\sigma<1$为任一常数．第一次所得图形B_1由2^d个边长相等的完全不连通的d维立方块组成．第二次对B_1的每个小立方体重复上一步的作法，使得割除的体积之和为kσ．k是任意常数（$0<k<1$），表示后一次割除的体积与前一次割除的体积之比．不断重复这一过程以至无穷，极限图形由$\mathscr{R}^d$中一些离散的点组成．它们有着无限嵌套的几何结构，是一类分形集，记作B(d,k,σ)．它由参数d、k、σ决定，其勒

贝格测度

$$\mu(B(d,k,\sigma))=1-\sum_{j=0}^{\infty}\sigma k^j=1-\sigma/(1-k)$$

当 $\sigma+k<1$ 时，$\mu(B)>0$， B 为胖分形集. 我们得到该集的 Hausdorff 维数

$$D_H(B(d,k,\sigma))=\begin{cases}d & \sigma<1-k\\ \ln 2^d/\ln(2/k^{1/d}) & \sigma<1-k\end{cases}$$

它们的两个分形指数

$$\beta=\begin{cases}-\ln k/\ln 2 & 0<\sigma<1-k\\ d-\ln 2^d/\ln(2/k^{1/d}) & \sigma=1-k\end{cases}$$

$$\alpha=\begin{cases}d & 0<\sigma<1-k\\ \ln 2^d/\ln(2/k^{1/d}) & \sigma=1-k\end{cases}$$

当 $d=1,\sigma=k=\lambda$ 时，B 就成为类康托集 I.

当 $d=2,\sigma=1/4,k=1/2$ 时，将 B 中的点以某种方式顺次连结，得到的康托曲线 C，勒贝格测度 $\mu(C)\geq\frac{1}{2}$. 即 C 是一条有面积的曲线. 它是拓扑学中的一个著名的反例，我们已对其胖分形特征进行了计算和讨论，它的维数和指数与对应尘集相同.

下面我们介绍动力系统中的胖分形集，其中涉及的轨道、混沌、周期点、哈密顿系统、耗散系统等概念，将在第五章给出.

例 4.19 动力系统混沌轨道为胖分形的例子.

1985年，昂伯格和法默研究了 4 种映射迭代的混沌轨道的胖分形，最著名的是奇里科夫－泰勒(Chirikov－Taylor)标准映射.

$$\begin{cases}p_{i+1}=p_i-(k/2\pi)\sin(2\pi q_i)\\ q_{i+1}=q_i+q_{i+1}\end{cases}$$

其中 p 和 q 对模 1 取值.

在双振子问题中，这个映射对应于一个特殊情形，即其中一个振子是自由振荡(即有常数周期，与第二振子具有脉冲单向耦合)的情形. 它描述了周期分离转子，磁瓶中的粒子俘获及许多其它物理问题.

当 $k=0$ 时，系统是可积的且所有轨道落在不变曲线之中. 但

是当 k>0 时，对应于周期运动的不变曲线消失. 运动轨道离开稳定的椭圆周期点，转向非稳定的双曲周期点，形成混沌轨道. 一个典型的例子如图 4.20 所示. 其轨道在能量曲面的子集上徘徊，遍历的然而确未完全复盖它，图中的孔眼是与稳定周期轨道关联的"稳定岛". 它们是由于不变曲线环绕稳定周期点运动引起的，并排斥周围的混沌轨道. 还有许多的岛链，对应着不同的周期轨道和稳定点的级联(hierarchy). 岛链周围还有岛链，以至无穷. 孔眼的级联组织导致围绕它的混沌轨道在所有标度上都具有精细结构，因而这些轨道是分形. 但是这些分形不同于耗散系统中的分形集. 最本质的区别是它们具有正的面积，因而是胖分形. 昂伯格和法默等人的研究表明很多哈密顿系统中的混沌轨道都具有这一特征.

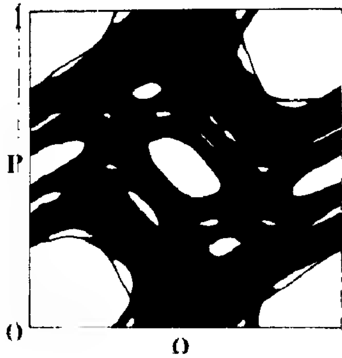


图 4.20　标准映射的混沌轨道

四种不同映射取各种参数值时的混沌轨道胖分形的分形指数和面积如表 4.1 所示.

例 4.21　量子混沌的胖分形

其中 S 为自旋，$J>0$，$-1\leqslant\sigma\leqslant 0$. 当 $S_4=S_1$，$\sigma=0$ 及 $\sigma=-1$ 时，分别对应于不同模型. 它们有不同的胖分形指数 β 与 s 的关系如图 4.21 所示. 半经典波函数的自相似标度性质生动地展示了它们可积与不可积的本质，其非规则性可用胖分形指数描述.

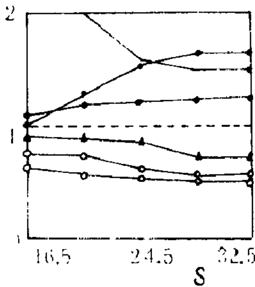


图 4.21　胖分形指数 β 与 s 的关系

表 4.1 几种映射的胖分形指数 β 和勒贝格测度 μ_0

测试系统	β	μ_0
标准映射(k=1.1)	0.54±0.04	0.557±0.002
标准映射(k=1.2)	0.68±0.05	0.392±0.002
标准映射(k=1.3)	0.55±0.03	0.619±0.002
Henon 映射(a=0.32)	0.55±0.05	0.388±0.003
摄动标准映射(k=0.9)	0.32±0.05	0.080±0.0004
简化 Ulam 映射(m=10)	0.65±0.07	0.688±0.0006

1986 年,中村(K. NaKamura)等研究了"不可积交换偶三旋体系"中半经典波函数量子混沌的胖分形.采用的哈密顿算符为

$$H=J\sum_{i=1}^{3}(S_i S_{i+1}+\sigma S_i^2 S_{i+1}^2)$$

胖分形的例子还有二次映射 $x_{n+1}=\mu-x_n^2$,圆映射 $\theta_{n+1}=(\theta_n+\omega+\delta\sin\theta_n)(\mathrm{mod}2\pi)$及人体内的血液循环等.在自然界中也广泛存在胖分形.例如,固体催化剂、蛋白质和酶的粗糙表面、材料的断裂面、起伏的大地表面、陶瓷、无机超导材料,熔盐中的孔穴及自由体积等都与胖分形有关.胖分形的发现,为人们认识丰富多采的大自然提供了一个新的视角与层面.

第五章

混沌动力系统与分形

混沌动力系统的奇异吸引子往往是典型的分形. 奇异吸引子研究是近年分形理论中最活跃和最有吸引力的一个领域. 1963 年洛伦兹发现第一个奇异吸引子, 1975 年 Li－Yorke 给出混沌定义, 同时期 Mandelbrot 开创分形几何, 这决非偶然. 分形与混沌这两个学科之间存在着根深蒂固的联系.

在动力系统中, 可看到数学与自然竟是如此融洽. 分形与混沌跨越了不同学科领域之间的鸿沟, 已把看上去那些毫不相干的东西拉到一起来了. 本章内容包括: 混沌动力系统; 分形吸引子与排斥子; Julia 集和 Mandelbrot 集; 函数系的迭代; 混沌的量度以及从倍周期分岐通往混沌的道路…….

§1 动力系统的基本概念

动力系统的概念来源于常微分方程稳定性理论的研究. 考虑定义于 $\mathscr{R}^d$ 上的常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varphi(x) \\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{5.1}$$

式中φ是$\mathscr{R}^d$到自身的连续可微映射，即$\varphi\in C^1(\mathscr{R}^d,\mathscr{R}^d)$，$x_0\in\mathscr{R}^d$. 熟知，满足(5.1)的解$\varphi(t,x_0)$总是局部存在的. 如果$\varphi$满足一定的条件，则解$\varphi(t,x_0)$可以延拓到$\forall\ t\in R$和$x_0\in\mathscr{R}^d$. 改写为$\varphi(t,x)$，它应满足关系：

$$(\text{I})\ \varphi(0,x)=x,\quad \forall\ x\in\mathscr{R}^d \tag{5.2}$$

$$(\text{II})\ \varphi(s+t,x)=\varphi[s,\varphi(t,x)],\quad \forall\ s,t\in R,\quad x\in\mathscr{R}^d \tag{5.3}$$

满足条件(Ⅰ)和(Ⅱ)的映射$\varphi:R\times\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}^d$称为$\mathscr{R}^d$中的动力系统(或流). 给定$x\in\mathscr{R}^d$，点集

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\{\varphi(t,x)\,|\,t\in R\}\subset\mathscr{R}^d \tag{5.4}$$

称作流φ经过点x的轨道.

若$X=(S,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，$\varphi:R\times X\to X$且φ满足

$$\begin{cases}(\text{I})\ \varphi(0,x)=x,\quad \forall\ x\in z & (5.5)\\ (\text{II})\ \varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x)),\quad \forall\ s,t\in R,\quad x\in z & (5.6)\end{cases}$$

则φ称作X上的一个拓扑动力系统. 若X是C^k微分流形，φ是连续映射(或具有直到k阶的连续导数)，则称φ为X上的C^0(连续)动力系统(或C^k阶微分动力系统). $\forall\ t\in R$，由$\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$定义了一个连续(或$C^k$)映射，$\varphi_t:X\to X$，它满足

$$(\text{I})\ \varphi_0=\mathrm{id} \tag{5.7}$$

$$(\text{II})\ \varphi_{s+t}=\varphi_s\circ\varphi_t,\quad \forall\ s,t\in R \tag{5.8}$$

式中id表示恒等映射，"$\circ$"表示映射的复合. 由此可见，$\forall\ t\in R$，φ_t有逆映射φ_{-t}，因此φ_t是一个同胚(或C^k微分同胚)映射. 从而，连续动力系统作成一个单参数变换群，参数取值范围是实数加群$(R,+)$.

对连续动力系统φ进行离散采样，考察每隔一定时间间隔τ

时系统的状况，得到一个双边序列

$$\cdots\varphi_{-2\tau},\varphi_{-\tau},\varphi_0=\mathrm{id},\varphi_\tau,\varphi_{2\tau},\cdots \tag{5.9}$$

这序列由同胚 $f=\varphi_\tau$ 生成

$$\varphi_{k\tau}=\varphi_\tau\circ\varphi_\tau\circ\cdots\circ\varphi_\tau=f\circ f\circ\cdots\cdots\circ f=f^k \tag{5.10}$$

$$\varphi_{-k\tau}=\varphi_{-\tau}\circ\varphi_{-\tau}\circ\cdots\circ\varphi_{-\tau}=f^{-1}\circ f^{-1}\circ\cdots\cdots\circ f^{-1}=f^{-k} \tag{5.11}$$

φ_τ 称为流 φ 的时刻 τ 映射. 特别 $\tau=1$ 时，φ_1 称为 φ 的时刻 1 映射.

一般地，任一同胚(或 C^k 微分同胚)f，未必是某个动力系统的时刻 τ 映射，但它也能生成一个双边序列

$$\cdots\cdots f^{-2},f^{-1},f^0,f^1,f^2,\cdots\cdots$$

这里 $f^0=\mathrm{id}$， $f^k=f\circ f^{k-1}$， $f^{-k}=(f^{-1})^k$. 该序列显然满足

$$(\text{I})\ f^0=\mathrm{id} \tag{5.12}$$

$$(\text{II})\ f^{k+l}=f^k\circ f^l,\quad \forall\ k,l\in Z \tag{5.13}$$

与连续动力系统的情形相类似，这种由同胚(或 C^k 微分同胚)生成的双边序列称作离散动力系统. 它也是一个单参数变换群，参数取值范围是整数加群 $(Z,+)$. 集合

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\{f^k(x)\,|\,k\in Z\} \tag{5.14}$$

$$\mathrm{Orb}_f^+(x)=\{f^k(x)\,|\,k\in Z_+\} \tag{5.15}$$

$$\mathrm{Orb}_f^-(x)=\{f^{-k}(x)\,|\,k\in Z_+\} \tag{5.16}$$

分别称作离散动力系统 f 过点 x 的轨道，正半轨和负半轨且显然有

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\mathrm{Orb}_f^+(x)\cup\mathrm{Orb}_f^-(x)$$

若存在 $n\in N$，使得 $f^n(x)=x$，则称 x 为 f 的周期点，使 $f^n(x)=x$ 的最小自然数 n 称为 x 的周期. 特别，周期为 1 的点 x 称为 f 的不动点，满足 $f(x)=x$. f 的周期点集与不动点集分别记为 Per(f) 和 Fix(f)，自然有

$$\mathrm{Fix}(f)\subset\mathrm{Per}(f) \tag{5.17}$$

过周期点的轨道称作周期轨道. 一条轨道为周期的当且仅当它是

有限轨道.

集合

$$\omega(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^k(x)\mid k\geqslant n\}} \tag{5.18}$$

$$\alpha(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^{-k}(x)\mid k\geqslant n\}} \tag{5.19}$$

$$L(x)=\omega(x)\bigcup\alpha(x)\quad L(f)=\bigcup_{x\in X}\quad L(x) \tag{5.20}$$

分别称作轨道 $Orb_f(x)$ 的 ω 极限点集，α 极限点集和极限点集. 由定义知，$\omega(x)$，$\alpha(x)$ 和 $L(x)$ 都是闭集. 若 z 是紧致的，则

$$\omega(x)\neq\varnothing,\alpha(x)\neq\varnothing,\forall\ x\in X \tag{5.21}$$

设 $x\in X$，若存在 x 的邻域 U，使得

$$f^k(U)\bigcap U=\varnothing,\forall\ k\in X\backslash\{0\} \tag{5.22}$$

则称 x 是 f 的游荡点，否则若对 x 的任意邻域 U，都存在 $k\in X(k\neq 0)$，使得 $f^k(U)\bigcap U\neq\varnothing$，则 x 称作 f 的非游荡点. f 的全体非游荡点的集合记作 $\Omega(f)$. 由定义知 $\Omega(f)$ 是闭集，而游荡点的集合是开集. 不难验证，$\forall\ x\in X,\omega(x)\subset\Omega(f)$ 且 $\alpha(x)\subset\Omega(f)$. 当拓扑空间 X 紧致时，$\Omega(f)\neq\varnothing$.

集合 $\Lambda\subset X$ 称作 f 的不变集，如果 $x\in\Lambda$，则 $Orb_f(x)\subset\Lambda$. 由此知 Λ 为 f 的不变集当且仅当 $f(\Lambda)\subset\Lambda,f^{-1}(\Lambda)\subset\Lambda$. 它等价于 $f(\Lambda)=\Lambda$. 可以证明，$Orb_f(x)$，$\omega(x)$，$\alpha(x)$，$Per(f)$，$Fix(f)$，$\Omega(f)$ 等都是 f 的不变集. 若 Λ 是 f 的闭不变集(非空)且不存在闭的非空不变真子集，则称 Λ 为 f 的极小集. .

设 $G\subset X$(或 $\mathscr{R}^d$)，$f:G\rightarrow G$ 是连续或 C^k 映射，f^k 表示 f 的第 k 次迭代，则迭代序列

$$f^0=id,f^1,f^2,\cdots \tag{5.23}$$

称作拓扑半动力系统或 C^k 微分半动力系统. 这时可引入与离散动力系统类似的概念. 只不过这时一般只能涉及非负整数的迭代，因而轨道只相当于原来的正半轨

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\{f^k(x)\mid k\in Z_+\}$$

只能讨论ω极限点集而不能讨论α极限点集. 游荡点与非游荡点的定义只能涉及正次数的迭代. f的不变集Λ应满足的关系变成$f(\Lambda)\subset\Lambda$,其它有关的定义也要作相应的修改.

半动力系统轨道的一个特殊现象是可能出现非周期的有限轨道. 例如$x\notin \mathrm{Per}(f)$,但可能存在$m\in N$,使得$f^m(x)\in \mathrm{Per}(f)$,那么$\mathrm{Orb}_f(x)$就是非周期的有限轨道. 为了区分周期的和非周期的有限轨道,需引入以下新的概念.

若存在$m\in Z_+$,使得$f^m(x)\in \mathrm{Per}(f)$,则称x为f的终于周期点,f的终于周期点的集合记为EPer(f),显然

$$\mathrm{Per}(f)\subset \mathrm{EPer}(f)=\bigcup_{m=0}^{\infty}f^m(\mathrm{Per}(f)) \tag{5.24}$$

经过终于周期点的轨道称作终于周期轨道. 对于半动力系统,一条轨道为有限轨道的充要条件是它为终于周期轨道.

由定义可见,若$x\in G$,则$\forall\, k\in Z_+$, $f^k(x)\in G$. 若把$x,f(x)$,$f^2(x)$,…当作时刻0,1,2,…时某一量的值,则时刻$k+1$时的值可以从时刻k的值通过函数给出. 比如油井钻探时在旋转钻头上冲击力点的分布可表成$x_{k+1}=F(x_k)$. 了解这样的分布对于预测钻头不均匀磨损有帮助. 如果一种昆虫种群有不连续的增长,则第$k+1$代种群规模可以用广义逻辑斯蒂方程$x_{k+1}=rx_k[1-x_k/k]$表示. 此外,在我国固定资产投资计划实行"拨改贷"以后,服从一定利息和税务条件的投资额也可以用这种形式表示. 比如建设项目按复利L_2计息投资,一次贷款Z_0,同时起息,建设周期n年,则应偿还的投资额$Z=Z_0(1+L_2)^n$,分年度的偿还额为

$$Z_{k+1}=(1+L_2)Z_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

只不过这是一个线性动力系统,它不同于逻辑斯蒂模型,也不产生混沌.

自然现象中有很多这类的例子. 因此,半动力系统的理论有着

广泛的应用，而且自然界的动力系统大多是非线性的，它常常伴生混沌.

§2 混沌动力系统

近年来，混沌理论由于广泛的应用而引起人们极大的兴趣. 分形几何学与现代混沌理论有着密切的联系. 首先，分形几何学中的标度不变性与现代混沌理论有明显的相同之处. 混沌理论揭示出，许多现象即使是遵循严格的确定性规则，但长期仍是无法精确预测的. 诸如大气湍流或人的心脏跳动之类的混沌事件在不同时间标度上表现出相似的变化模式，这与具有标度不变性的物体在不同的空间标度上表现出相似的结构模式十分相象. 尤金斯(H. Jürgens)等认为分形与混沌之间存在的一致性并非偶然，这种一致性背后存在着根深蒂固的联系. 分形几何就是混沌几何.

分形与混沌虽然有着一致性，但是它们还有着各自不同的特点. 混沌是一种动态过程，它当然与 Hausdorff 维数、Mandelbrot 的分形与分维有差异. 混沌也不同于分歧(bifurcation)问题. 为了更好地分析分形问题，有必要了解混沌理论的一些基本概念，以掌握分形与混沌的联系与差异.

简单地说，"混沌"现象表示某种紊乱的、不清楚的或不规则的现象. 怎样正确地刻画混沌现象？却经历了长期的探讨. 1987 年美国圣克鲁斯(Santa Cruz)加州大学动力系统研究小组的 4 位教授在《科学美国人》上发表《混沌现象》一文，对混沌现象给出了通俗的刻画："混沌现象是丝毫不带随机因素的固定规则产生的". 它说明混沌作为一种动态过程也不同于随机过程. 文中用两个例子分析了混沌过程. 第一个例子是用面包师揉面团的方式来说明混沌动态的. 面包师将一滴蓝色食品着色剂放在面团中，先把面团擀

平，然后折叠，重复操作一段时间以后，面包中出现很多蓝白相间的层次．实际上，如此操作20次以后，就将液滴的长度拉长到100万倍以上，而其厚度减小到分子水平．这种工序相当于一种拉长后弯曲成马蹄形落在原域的映射，其实质是著名的斯梅尔马蹄形映射．

第二个例子是自来水龙头滴水实验．有时连续水滴的时间间隔可以非常一致，但是当水流速度稍稍高一些时，水滴的方式常常不再重复．而在很长时间以后，两水滴之间的间隔可能要多小有多小，同时也会出现很不接近的间隔．这一现象的实质，就是周期3蕴含混沌的Li－Yorke定理．

下面我们介绍相关的问题．

一．结构稳定性与局部结构稳定性

本节假定X，Y是$C^r(r\geqslant 0)$微分流形（$r=0$时即为通常拓扑空间，混沌动力系统中研究最多的是$r=1$的情形）．$\mathrm{Diff}^r(X)$表示X到自身的C^r的微分同胚映射的集合，$C^r(X,Y)$表示X到Y的C^r微分同胚映射的集合（$r=0$时即同胚）．

设$f\in \mathrm{Diff}^r(X)$、$g\in \mathrm{Diff}^r(Y)$，若存在$h\in C^0(X,Y)$，假设

$$h\circ f=g\circ h \tag{5.25}$$

即下列图表可交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

则称f与g拓扑共轭．

拓扑共轭是一个等价关系．h把系统f过x点的轨道变成系统g过h(x)点的轨道，即

$$h(\mathrm{Orb}_f(x))=\mathrm{Orb}_g(h(x)) \tag{5.26}$$

把轨道$\mathrm{Orb}_f(x)$的ω（或α）极限点变成$\mathrm{Orb}_g(h(x))$的ω（或α）极限

点

$$h(\omega_f(x))=\omega_g(h(x)) \tag{5.27}$$

$$h(\alpha_f(x))=\alpha_g(h(x)) \tag{5.28}$$

把 f 的 n 周期点变成 g 的 n 周期点，把 f 的非游荡点变成 g 的非游荡点. 总之，两个拓扑共轭的动力系统，有相同的轨道结构，因此这两个系统可以认为是相同的. 类似地可在非游荡集 Ω 上讨论 Ω 共轭.

设 $f\in \mathrm{Diff}(X)$，若存在 f 在 $\mathrm{Diff}^r(X)$的 C^r 拓扑中的邻域 $\mathscr{U}$，假设 $\forall\ g\in\mathscr{U}$ 都与 f 拓扑共轭，则称 f 是 C^r 结构稳定的.

为了研究混沌动力系统的分形问题，需要讨论 f 在不变集 Λ 上的结构稳定性和在某点的结构稳定性.

设 $U\subset X$，$f\in C^r(U,X)$是从 U 到 f(U)的微分同胚，$\Lambda\subset U$ 是 f 的一个紧致不变集，d 是与 X 的拓扑相容的任一个距离，称 f 在 Λ 是 C^r 结构稳定的，如果 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 f 在 $C^r(U,X)$中的邻域 $\mathscr{U}$，使 $\forall\ g\in\mathscr{U}$，存在 g 不变子集 $\Lambda_g\subset U$ 和

$h:\Lambda\to\Lambda_g$

满足Ⅰ) $d(h(x),x)<\varepsilon$, $\forall\ x\in\Lambda$；

Ⅱ) $h\circ f|\Lambda=g\circ h|\Lambda$，即下述图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g\end{array}$$

称 f 在 $P\in U$ 是局部结构稳定的，如果对 P 点的任意邻域 $V\subset U$，存在 f 在 $C^r(U,X)$中的邻域 $\mathscr{V}$，假设 $\forall\ g\in\mathscr{V}$，都在某点 $q\in V$ 与 f 在 P 点局部拓扑共轭.

结构稳定性问题，就是研究什么样的微分动力系统在“小扰动”下不改变它的轨道结构. 但是，实际上，有很多非线性系统，即使简单光滑函数的迭代，在“小扰动”下，轨道结构都将发生很大的

变化，往往产生整体结构的稳定性和局部不稳定性，这种轨道常常具有分形的特征.

例 5.1 逻辑斯蒂(Logistic)二次函数

$$f_r(x)=rx(1-x),x\in[0,1],0\leqslant r\leqslant 4 \tag{5.29}$$

的迭代. 这个函数是生态学中一个非常重要的模型，生物种群的繁衍常常可用它描述. 当参数 r 较小时，对于任取的初始点 x_0，轨道 $\{x_n|n\in Z_+\}$将趋于一个点. 但是当 r 慢慢变大而超过 3 时，轨道趋向一对周期 2 的点. 再变大而超某一数时，轨道趋于一组周期 4 的点. 然后随 r 的逐渐变大，轨道将趋于一组周期 2^m 的点. 但是当 r 大于某个极值后，就出现一些“奇怪现象”. 比如，对某些 r 来说$\{x_n|n\in Z_+\}$趋于一组周期 5 或 6 的点，而对某些 r 来说，轨道在两个区间跑来跑去. 尤其当 r＝4 时，$\{x_n\}$在[0,1]区间跑来跑去，这样的轨道就是不稳定的.

例 5.2 杜芬(Duffing)方程

$$\ddot{x}+k\dot{x}+x^3=B\cos t \tag{5.30}$$

注意：(5.30)式是杜芬方程的一个特例，

受驱动的杜芬振子的一般形式是：

$\ddot{x}+k\dot{x}+ax+bx^3=A+B\cos(2\pi t/T)$

这是一个非线性二阶常微分方程，在数学许多分支的发展史上占有相当的地位. 考察这个微分方程解的轨道，会发现对某些参数 k、B 而言(比如 k＝0.05，B＝7.5)，当 t 很大时，其轨道会乱七糟八地走一通，毫无规律可循，其轨道也是不稳定的.

微分方程理论中的庞加莱——本迪克森(Bendikson)定理表明，在 $\mathscr{R}^2$ 中的常微分方程组 $\dot{x}=f(x)$在 f(x)很光滑，能保证解的“存在唯一性”时，则从任一点 $x\in\mathscr{R}^2$ 出发的解，在有限区间中的点的轨道都趋于一个周期解. 这个二维空间的理论虽然在 3 维及其以上的空间里无法证明，但是大家一般相信，即使对 3 维以上的

空间里的微分方程，从任何初始条件 x_0 出发的解的轨道，最后的变化还是相当“规则”的. 比如说，趋向于几乎周期或拟周期的解等. 在混沌理论出现以前，若发现轨道变化是非常不规则的或混乱的，常常以为是计算方式问题或计算误差所致. R. May 等人就曾遇到这样的问题. 混沌理论诞生以后，人们才认识到，这种不规则的混乱现象并不一定是计算方式问题或是计算误差所致，而在于函数本身的特性. 即函数 f 在 Λ 上的性质表现为混沌的，从而导致了系统动态的混沌性质.

二. 沙可夫斯基定理和李——约克定理

先介绍沙可夫斯基(Sarkovskij)序. 按照下述方式给自然数重新排列次序：首先排所有大于 1 的奇数 3,5,7,…；接着排列它们的 2 倍，即所有形如 3×2,5×2,7×2,…,这样的数，然后排它们的 2^2 倍，2^3 倍，2^4 倍，等等. 依次这样排下去，最后再按降幂顺序排列所有的 2 的方幂，…,2^4,2^3,2^2,2,1. 如果用 $\triangleleft$ 表示这种顺序，我们有

$$3\triangleleft 5\triangleleft 7\triangleleft\cdots\triangleleft 3\times 2\triangleleft 5\times 2\triangleleft 7\times 2\triangleleft\cdots\triangleleft 3\times 2^2\triangleleft 5\times 2^2\triangleleft 7\times 2^2\triangleleft\cdots\triangleleft 2^4\triangleleft 2^3\triangleleft 2^2\triangleleft 2\triangleleft 1$$

按这种方式给自然数排列的顺序称为沙可夫斯基序.

定理 5.1(Sarkovskii)　设 $I=[0,1]$，$f:I\to R$ 是连续映射. 若 f 具有周期为 m 的周期点，则它就具有按沙可夫斯基序排列在 m 之后的一切自然数为周期的周期点. 即是说，有一切周期 $\triangleleft m$ 的周期点.

前苏联数学家沙可夫斯基在 1964 年证明了上述规律，但这一结果长期不为西方学者所知. 直到 1975 年，李天岩和约克(J. A. Yorke)重新证明了该定理的一个特殊情形，并提出了混沌概念，这一工作才为人们所重视.

定理 5.2(Li－York)　设 $f:R\to R$ 是连续函数且有一个周期

3 的点，则

(1) $\forall\ n\in N$，f 都存在一个周期 n 的周期点 x_n.

(2) i) 存在一个不可数的子集合 S，$\forall\ x,y\in S$ 有

$$\liminf_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0 \tag{5.31}$$

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|>0 \tag{5.32}$$

ii) 对 f 的任一周期点 $P\in\mathscr{R}$，$\forall\ x\in S$，有

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(p)-f^n(x)|\neq 0 \tag{5.33}$$

显然，此定理的第一部分是沙可夫斯基定理的一个特殊情形，第二部分是第一部分的必然结果，但这部分给出了混沌的一个描述. 李一约克定理是李天岩与约克 1975 年在《周期 3 意味着混沌》一文中提出来的. 1976 年，克罗厄登(P. Kloeden)等 3 人在《自然》杂志上撰文指出，只用李一约克定理的第二部分，即关于上极限和下极限的结论，就可以给出严格的混沌定义.

其实，与分形一样，混沌也是一个很难精确定义的概念. 现在，尽管混沌也有多种多样的定义，但还没有一个完全令人满意的. 我们将在适当的时候给出其它描述.

三. 混沌的例子

函数的迭代，可以用来研究简单方程的复杂动力学行为. 有时可以借助简单模型来理解复杂现象的不规则性和混沌振荡. 前面谈到的逻辑斯蒂模型在 r=4 时，将产生混沌状态. 若 x 表示数目为 x 的种群，按李一约克定理解释，可以说经过二代或更多代的增长，在达到不能承受的数量时，种群数目猛然下降，退到水平 x 或 x 以下. 在这种情况下 f 产生混沌状态. 日本学者上田皖亮关于 Duffing 方程的研究说明，对某些 k、B 值，在 t 很大时，系统产生混沌状态.

例 5.3 Smale 马蹄映射.

为了研究结构稳定系统和非稳定系统之间的变化实质，Smale 研究了二维流形的一种马蹄映射，发现了包括混沌现象在内的许多重要性质.

设 $Q=ABCD$ 表示 $\mathscr{R}^2$ 中的一个正方形.

$Q=\{x \mid |x_i|\leq 1, i=1,2\}$

φ 是把 Q 映入 $\mathscr{R}^2$ 中一马蹄形集的映射.

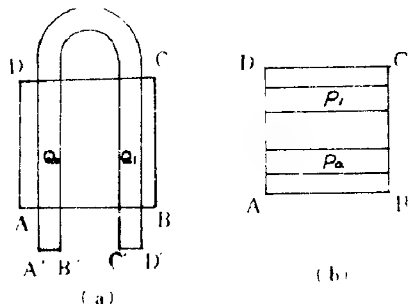


图 5.1 马蹄映射

如图 5.1(a)所示，用 V_0 和 V_1 表示 $Q\cap\varphi(Q)$的两个分支，设$\varphi(A)=A'$，$\varphi(B)=B'$，$\varphi(C)=C'$，$\varphi(D)=D'$，$U_0=\varphi^{-1}(V_0)$，$U_1=\varphi^{-1}(V_1)$（图 5.1(b)）

设

i)φ 在 U_0 和 U_1 中为线性，

ii)φ 在边 AD 和 BC 上膨胀，在边 AB 和 DC 上收缩.

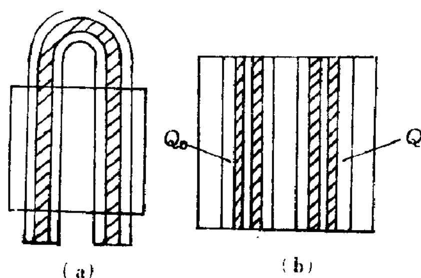


图 5.2 (a)阴影部分为 $\varphi(v_0)$

(b)阴影部分为 $Q\cap\varphi^2(\theta)$

像 $\varphi(V_0)$为图 5.2(a)中阴影所示，像 $\varphi(V_1)$类似地给出，它是平行于 $\varphi(V_0)$的弯曲带域. 集合 $Q\cap\varphi^2(Q)$由 4 个矩形分支组成，如图 5.2(b)中的阴影所示. 重复上述过程可得到一个集合序列，第 n 个集合 $Q\cap\varphi^n(Q)$分成 2^n 个矩形分支，具有无限嵌套结构，即 $Q\cap\varphi^n(Q)\supset Q\cap\varphi^{n+1}(Q)$，$n=1,2,\cdots$，它们的垂直边长即 AD 之长，但水平边长不断缩小. 当 $n\to+\infty$时，趋于 0. 其极

限集

$$\Lambda^{+}=\bigcap_{n>0}\varphi^{n}(Q) \tag{5.34}$$

它是一个Cantor拟尘集，即AB上的一个康托集$\triangle_1$与AD的笛卡尔积.

反向迭代，得到$Q\cap\varphi^{-1}(Q)$，$Q\cap\varphi^{-1}(Q)=U_0\cup U_1$. 重复这一过程所得的集序列，正是$n>0$时那些集合旋转90°以后的位置. 极限集

$$\Lambda^{-}=\bigcap_{n<0}\varphi^{n}(Q) \tag{5.35}$$

是类似于Λ^{+}的一个康托拟尘集，即CD上的一个康托集$\triangle_2$与AB的笛卡尔积.

$$\Lambda=\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}\varphi^{n}(Q)=\Lambda^{+}\cap\Lambda^{-}=\triangle_1\times\triangle_2 \tag{5.36}$$

是马蹄映射φ的一个不变集，即$\varphi(\Lambda)=\Lambda$. $\varphi:\Lambda\to\Lambda$具有无穷个周期点，而且所有周期点构成的集合在$\Lambda$中稠密. 所以$\Lambda$的每一个点是$\varphi$的一个非游荡点，但是仍有无穷多个点不是渐近稳定周期点，这些点构成了李—约克刻画的混沌集.

§3 符号动力系统与马蹄

符号动力系统较易研究. 当人们对符号系统的动力学状态，有了很好的了解之后，就可借助它去研究更一般的系统. 在混沌研究中，人们通过符号系统描述某些紊动行为. 在混沌的定性分析方面已取得了较大的进展. 艾扎瓦(Aizawa)等人还利用符号动力系统分析了阵发混沌. 下面就简要介绍符号动力系统与"马蹄".

一. 符号动力系统

考虑N个符号的集合，例如N个数字的集合

$$S(N)=\{0,1,2,\cdots,N-1\} \tag{5.37}$$

对该集合赋以离散拓扑(即 S(N)的每个子集都是开集)成为一个拓扑空间. 将其距离化:∀ a、b∈S(N),定义距离

$$\rho(a,b)=\begin{cases}1 & 若\ a\neq b\\ 0 & 若\ a=b\end{cases} \tag{5.38}$$

可列个这样的空间 $S_j=S(N)$的笛卡尔积

$$\sum(N)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty}S_j \tag{5.39}$$

或

$$\sum{}^{+}(N)=\prod_{j=0}^{\infty}S_j \tag{5.40}$$

称作符号空间. 其元素分别为双边符号序列$\{S_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$或单边序列$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.

前一情形$\sum(N)$称作双边符号空间,后一情形称作单边符号空间. 符号空间也可以距离化. 对双边情形,引入距离

$$d(s,t)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\rho(s_j,t_j)/2^{|j|},\quad s,t\in\sum(N) \tag{5.41}$$

这里 $s=\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty},t=\{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

对单边情形,引入距离

$$d(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\rho(s_j,t_j)/2^{j},\quad s,t\in\sum{}^{+}(N) \tag{5.42}$$

这里 $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty},t=\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$.

符号空间$\sum(N)$上的移位映射 $\sigma:\sum(N)\to\sum(N)$定义为

$$(\sigma(s))_j=s_{j+1},\quad j\in Z \tag{5.43}$$

σ定义了一个动力系统,其作用是将点 $s=\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$变为 $\sigma(s)=\{s_{n+1}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

对单边情形 $\sigma^{+}:\sum{}^{+}(N)\to\sum{}^{+}(N)$定义为

$$(\sigma(s))_j=s_{j+1},\quad j\in Z_{+}=\{0\}\cup N. \tag{5.44}$$

这时 σ^{+}定义了一个半动力系统,其作用是将点 $s=\{s_n|n\in Z_{+}\}$变

为

$$\sigma^+(s)=\{s_n|n\in N\}$$

容易证明下述两个性质

命题 5.1 符号空间$\sum(N)$和$\sum^+(N)$是紧致的，完全的和完全不连通的.

命题 5.2 符号动力系统$\sigma:\sum(N)\to\sum(N)$和$\sigma^+:\sum^+(N)\to\sum^+(N)$具有以下性质

i)σ(或σ^+)的周期点集在$\sum(N)$(或$\sum^+(N)$)中稠密，即

$$\overline{Per(\sigma)}=\sum(N)\quad,\overline{Per(\sigma^+)}=\sum^+(N)\qquad(5.45)$$

ii)σ(或σ^+)有一条轨道在$\sum(N)$(或$\sum^+(N)$)中稠密.

二. 移位不变集

设 X 是拓扑空间，f:X→X 是同胚或连续映射，Λ是 f 的不变集. 若存在同胚$h:\sum(N)\to\Lambda$(或$\sum^+(N)\to\Lambda$)，使得$f\circ h=h\circ\sigma$，即下述图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\sum(N) & \xrightarrow{\sigma} & \sum(N)\\ h\downarrow & & h\downarrow\\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda\end{array}$$

则称Λ为 h 的移位不变集.

例 5.4 半动力系统移位不变集的例子.

设$f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$，它将线段 J=[−1,1]拉长(拉长倍数>2)，然后折迭复盖于 J 之上. 比如$f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$定义为

$f(x)=-3x^2+4/3$

现在分析 f 的迭代(半动力系统). 首先注意到$f^{-1}(J)$是两段不相交的子线段U_0和U_1的并集($U_0=[-\sqrt{7}/3,-1/3]$，$U_1=[1/3,\sqrt{7}/3]$).

$$f^{-1}(J)=U_0\cup U_1$$

这两段的长度都小于J的长度的一半.

$$|U_0|,|U_1|<\frac{1}{2}|J|=1$$

从而有

$$f(U_0)=f(U_1)=J\supset U_0\cup U_1$$

$f^{-1}(U_0)$和$f^{-1}(U_1)$又各是互不相交的子线段U_{00},U_{01}和U_{10},U_{11}的并,满足

$$f(U_{00})=U_0 \qquad f(U_{01})=U_1$$
$$f(U_{10})=U_0 \qquad f(U_{11})=U_1$$

其中

$$|U_{ij}|<\frac{1}{2}|U_i|<\frac{1}{2} \quad (i,j=0,1)$$

一般,对于$k\in Z_+$,定义

$$U_{s_0s_1\cdots s_k}=U_{s_0}\cap f^{-1}(U_{s_1})\cap\cdots\cap f^{-k}(U_{s_k})$$

这里$s_0,s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}=S(2)$,且易验证$U_{s_0s_1\cdots s_k}(k\geqslant 1)$

满足

$$f(U_{s_0s_1\cdots s_k})=U_{s_1\cdots s_k}, \quad |U_{s_0s_1\cdots s_k}|<1/2^k$$

上述形成$U_{s_0},\cdots,U_{s_0s_1\cdots s_k}$的过程如图5.3所示.

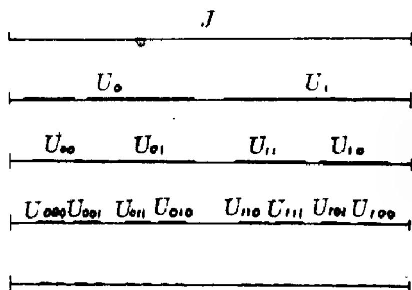


图5.3半动力系统移位不变集

对$s=(s_0,s_1,s_2,\cdots)\in\sum(2)$,引入记号

$$U(s)=\bigcap_{j=0}^{\infty}f^{-j}(U_{s_j})=\bigcap_{k=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k}$$

则$f(U(s))=U(\sigma(s))$且$\#(U(s))=1$,$\#(A)$表示集A的基数,即$U(s)$是单点集.令

$$f^{-1}(J) = \bigcup \sum U(s) \tag{5.16}$$

定理5.3 Λ是f的一个紧致不变集，且$f|\Lambda$拓扑共轭于$\sigma: \sum(2) \to \sum(2)$.

在上述例子中，f将两个不相交的子线段V_0和V_1拉长再盖到$J \supset U_0 \cup U_1$之上，拉长的倍数>2. 这样的性质是经得起"C^1小扰动的"，即如果g在C^1意义下充分接近f，那么g也具有类似性质.

定理 5.4 映射f在不变集Λ上是结构稳定的.

三. 马蹄模型

上节介绍了Smale马蹄模型的构造与性质，本节用符号动力系统来研究这一模型. 这个例子中的微分同胚φ，在它的一个不变集上，拓扑共轭于双边符号空间$\sum(2)$的移位映射σ.

考虑平面$\mathscr{R}^2$上的正方形

$P=(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)\times(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$，$Q=[-1,1]\times[-1,1]$

把正方形P在竖直方向拉长（拉伸比>2），在水平方向压缩（压缩比<1/2），做成一竖直长条，然后弯曲成马蹄形放回到P上. 用这种方式构造了一个映射$\varphi: P \to \mathscr{R}^2$，它是从P到$\varphi(P)$的微分同胚.

首先观察到$V=\varphi(Q)\cap Q$由两个不相交的竖条V_0和V_1组成

$$V=V_0\cup V_1$$

每一竖条的宽度$\theta(V_i)$小于Q的宽度的一半，而

$$\theta(V_0), \quad \theta(V_1)<1$$

其次，我们注意到$U=\varphi^{-1}(V)$由两个不相交的横条

$$U_0=\varphi^{-1}(V_0), \quad U_1=\varphi^{-1}(V_1)$$

组成

$$U=U_0\cup U_1$$

每一横条的厚度 $\theta(U_i)$ 小于 Q 厚度的一半，即

$$\theta(U_0),\theta(U_1)<1$$

以下记

$$U_{ij}=\varphi^{-1}(V_i\cap U_j)=V_i\cap\varphi^{-1}(U_j),\quad i,j=0,1,$$

$$V_{ij}=\varphi(U_i\cap V_j)=V_i\cap\varphi(V_j),\quad i,j=0,1$$

可以看出，U_{ij} 是包含在 U_i 中的横条且

$$\theta(U_{ij})<\frac{1}{2}\theta(U_i)<\frac{1}{2}.$$

V_{ij} 是包含在 V_i 中的竖条且

$$\theta(V_{ij})<\frac{1}{2}\theta(V_i)<\frac{1}{2}$$

一般地，对于 $s_{-k},\cdots,s_{-1},s_0,s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}=S(2)$，可定义

$$U_{s_0s_1\cdots s_k}=\varphi^{-1}(V_{s_0}\cap U_{s_1\cdots s_k})=U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1\cdots s_k})$$
$$=U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1})\cap\cdots\cap\varphi^{-k}(U_{s_k}),$$

$$V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}=\varphi(U_{s_{-1}}\cap V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})=V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})$$
$$=V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-2}})\cap\cdots\cap\varphi^{k-1}(V_{s_{-k}})$$

可以看出，$U_{s_0s_1\cdots s_k}$ 是包含于 $U_{s_0s_1\cdots s_{k-1}}$ 中的一横条，而 $V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}$ 是包含于 $V_{s_{-k+1}\cdots s_{-1}}$ 中的一竖条，则有

$$\varphi(U_{s_0s_1\cdots s_k})=V_{s_0}\cap U_{s_1\cdots s_k},$$

$$\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}})\cap V_{s_0}=V_{s_{-k}\cdots s_{-1}s_0},$$

$$\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k})<\frac{1}{2}\theta(U_{s_1\cdots s_k})<1/2^k$$

$$\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}})<\frac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})<1/2^{k-1}$$

对 $s=\{s_n|n\in Z\}\in\sum(2)$，记

$$U(s)=\bigcap_{j=0}^{\infty}\varphi^{-j}(U_{s_j})=\bigcap_{k=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k},$$

$$V(s)=\bigcap_{j=1}^{\infty}\varphi^{j-1}(V_{s_{-j}})=\bigcap_{k=1}^{\infty}V_{s_{-k}\cdots s_{-1}},$$

则可以证明

i) $\varphi(V(s)\cap U(s))=V(\varphi(s))\cap U(\rho(s))$, (5.47)

ii) $\#(V(s)\cap U(s))=1$ (5.48)

再引入记号

$$\Lambda=\bigcup_{s\in\sum(2)}(V(s)\cap U(s)) \quad (5.49)$$

把单点集与它所含的唯一点等同视之,可以定义一个映射 h: $\sum(2)\to\Lambda$ 如下

$$h(s)=V(s)\cap U(s), \quad \forall s\in\sum(2)$$

Smale 证明了如下定理:

定理 5.5 Λ 是 φ 的一个紧致不变集,并且 $\varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于 $\sigma:\sum(2)\to\sum(2)$,即

$$\varphi\circ h=h\circ\sigma$$

因此下列图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\sum(2) & \xrightarrow{\sigma} & \sum(2)\\ h\downarrow & & \downarrow h\\ \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda\end{array}$$

定理 5.6(Smale) 马蹄模型中的 φ 在其移位不变集 Λ 上是结构稳定的.

四. 双曲线性映射与双曲不动点

双曲线性映射是沿一个方向扩张,沿另一方向收缩的可逆线性映射.

设 $f:D\to D$ 是可逆线性映射. 若 D 可以分解成关于 f 不变的闭线性子空间 D^u 和 D^s 的直和

$$D=D^u\oplus D^s, \quad f(D^u)=D^u, \quad f(D^s)=D^s$$

且存在常数 $C_1,C_2>0$, $0<\lambda<1$ 使得

$$\|f^k(x_u)\|\geqslant C_1\lambda^{-k}\|x_u\|, \quad \forall x_u\in D^u, \quad k=1,2,\cdots$$

$$\|f^k(x_s)\| \le C\lambda^k \|x_s\|, \quad \forall x \in D^s, \quad k=1,2,\cdots$$

则称 f 为双曲线性映射，D^u 称为 f 的扩张子空间，D^s 为 f 的收缩子空间.

双曲线性映射 f 的逆映射 f^{-1} 也是双曲线性映射. 线性映射的双曲性经小扰动之后不至于被破坏.

定理 5.7 $f \in L(D,D)$ 是双曲线性映射，则 $g \in L(D,D)$ 与 f 充分接近时(即 $\|g-f\|$ 充分小时)，g 也是双曲线性映射.

定理 5.8 要使可逆映射 $f: \mathscr{R}^d \to \mathscr{R}^d$ 为双曲线性映射当且仅当 f 的任何特征值都不落在复平面的单位圆周上，即 $|\lambda| \neq 1$.

设 U 是 $\mathscr{R}^d$ 中开集，$a \in U$，$f \in C^1(U, \mathscr{R}^d)$ 以 a 为不动点，即 $f(a)=a$. 若 f 在 a 点的微分是双曲线性映射，则称 a 为 f 的双曲不动点.

双曲不动点在 C^1 小扰动下不会消失，即有下述定理.

定理 5.9 设 $U \subset \mathscr{R}^d$ 是开集，$a \in U$ 是 $f \in C^1(U, \mathscr{R}^d)$ 的双曲不动点，则存在 a 点的开邻域 $W \subset U$ 和 f 的 C^1 邻域 $\mathscr{V}$，使得 $\forall g \in \mathscr{V}$，在 W 中有唯一不动点 c 且 c 是 g 的双曲不动点.

双曲不动点具有局部结构稳定性.

定理 5.10 设开集 $U \subset \mathscr{R}^d$，$a \in U$ 是 $f \in C^1(U, \mathscr{R}^d)$ 的双曲不动点，则 f 在 a 点邻近局部结构稳定. 即只要 g 在 C^1 意义下充分接近于 f，g 在 a 点邻近就有唯一的双曲不动点 c，并且 g 限制于 c 点附近与 f 限制于 a 点邻近彼此拓扑共轭.

设 $U \subset \mathscr{R}^d$ 是开集，$a \in U$，$f \in C^1(U, \mathscr{R}^d)$，$f(a)=a$，$V \subset U$ 是 a 点的任意邻域，则 f 在 a 点的局部稳定集和局部不稳定集分别定义为

$$W_V^s(a,f) = \{x \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(V) \mid \lim_{k \to +\infty} f^k(x) = a\} \tag{5.50}$$

$$W_V^u(a,f) = \{y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(V)\} \mid \lim_{k \to +\infty} f^{-k}(y) = a\} \tag{5.51}$$

若$f\in \mathrm{Diff}^1(\mathscr{R}^d)$，$f(a)=a$；则$f$在$a$点的稳定集和不稳定集分别定义为

$$W^s(a,f)=\{x\in\mathscr{R}^d \mid \lim_{k\to+\infty} f^k(x)=a\} \tag{5.52}$$

$$W^u(a,f)=\{x\in\mathscr{R}^d \mid \lim_{k\to+\infty} f^{-k}(x)=a\} \tag{5.53}$$

显然这时对a点的任意邻域V，有

$$W^s(a,f)=\bigcup_{l=0}^{\infty} f^{-l}[W_V^s(a,f)]$$

$$W^u(a,f)=\bigcup_{l=0}^{\infty} f^{l}[W_V^u(a,f)] \tag{5.54}$$

可以证明，$f\in C^r(U,\mathscr{R}^d)(r\geq 1)$在双曲不动点处的局部稳定集和局部不稳定集都是$C^r$微分流形，因此将稳定集和不稳定集称作稳定流形和不稳定流形.

值得注意的是，这里的"稳定"与"不稳定"与结构稳定性并无关系，仅仅用以表示点在f的正向迭代下趋向不动点或远离不动点.

五. 双曲集的稳定流形与不稳定流形

将双曲不动点的概念加以推广，可以得到双曲不变集的概念.

设M是d维欧氏空间或光滑Riemann流形，$P\subset M$是M的一个开集，$f\in C^1(P,M)$是从P到$f(P)$的微分同胚，紧致集$\Lambda\subset P$称为f的一个双曲不变集，如果

(Ⅰ) Λ关于f是不变的，即$f(\Lambda)=\Lambda$.

(Ⅱ) $T_\Lambda M=(TM)|_\Lambda$分解为关于$Tf$不变的连续的Whitney和(即$C^0$直和)

$$T_\Lambda M=E^u\oplus E^s$$

$$Tf(E_x^u)=E_{f(x)}^u,\ Tf(E_x^s)=E_{f(x)}^s,\quad \forall x\in\Lambda$$

(Ⅲ) 对于M的Riemann度量$<\cdot,\cdot>$，存在常数$C_1>0$，$C_2>0$和$0<\lambda<1$，使得

$$|Tf^n(\xi)|\geq C_1\lambda^{-n}|\xi|,\quad \forall \xi\in E^u,\quad n=1,2,\cdots$$

$|Tf^n(\eta)|1 \leqslant C_2\lambda^n|\eta|$, $\forall \eta \in E^s$, $n=1,2,\cdots$

$|\cdot|$是由 Riemann 度量$<\cdot,\cdot>$给出的范数.

这里 Tf 表示 f 的切映射,$T_\Lambda M$ 是Λ的纤维丛,即切丛 TM 在Λ上的限制.

当Λ是单独的一个点时,即双曲不动点;当Λ是一条周期轨道时,即双曲周期点.

定理 5.11 (结构稳定性定理)

设 M 是 d 维欧氏空间或光滑 Riemann 流形,$P \subset M$ 是开集,$f \in C^1(P,M)$是 P 到 f(P)的微分同胚,$\Lambda \subset P$ 是 f 的双曲不变集,则 f 在Λ是结构稳定的. 即$\forall \delta > 0$,存在 f 在 $C^1(P,M)$中的邻域$\mathscr{U}$,使得$\forall g \in \mathscr{U}$,存在关于 g 不变的集$\Lambda g \subset P$ 和同胚 $h: \Lambda \to \Lambda g$ 满足

(Ⅰ) $h \circ f|\Lambda = g \circ h$

(Ⅱ) $\sup\limits_{x \in \Lambda} d(h(x),x) < \delta$

设(X,d)为度量空间,Homeo(X)表示从 X 到 X 的同胚映射的集合,则稳定集与不稳定集的定义如下. $f \in \mathrm{Homeo}(X)$,$x \in X$,集合

$$W^s(x,f) = \{y \in X | \lim_{k \to +\infty} d(f^k(y), f^k(x)) = 0\} \tag{5.55}$$

$$W^u(x,f) = \{y \in X | \lim_{k \to +\infty} d(f^{-k}(y), f^{-k}(x)) = 0\} \tag{5.56}$$

分别称作 f 在点 x 的稳定集和不稳定集.

对 $f \in \mathrm{Homeo}(X)$, $x \in X$,$\varepsilon > 0$,集合

$$\begin{aligned} W^s_\varepsilon(x,f) &= \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(B(f^j(x),\varepsilon)) \cap W^s(x,f) \\ &= \{y \in X | d(f^j(y),f^j(x)) < \varepsilon, \quad j=0,1,2,\cdots; \\ &\qquad \lim_{k \to +\infty} d(f^k(y),f^k(x)) = 0\} \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} W^u_\varepsilon(x,f) &= \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(B(f^{-j}(x),\varepsilon)) \cap W^u(x,f) \\ &= \{y \in X | d(f^{-j}(y),f^{-j}(x)) < \varepsilon, \quad j=0,1,2,\cdots; \\ &\qquad \lim_{k \to +\infty} d(f^{-k}(y),f^{-k}(x)) = 0\} \end{aligned} \tag{5.58}$$

分别称为 f 在 x 点的尺度为 ε 的局部稳定集和局部不稳定集.

为刻画稳定流形与不稳定流形,需引入 C^r 嵌入圆盘的连续族.

对 $k\in N$,集合

$$D^k=\{u=(u_1,\cdots,u_k)\in\mathscr{R}^k \mid \sum_{j=1}^{k}u_j^2<1\} \tag{5.59}$$

称为 k 维圆盘. 对 $\Lambda\subset M$,$\{D_x\}_{x\in\Lambda}$ 称为 C^r 嵌入圆盘的一个连续族,如果 $\forall\ x\in\Lambda$,$\exists$ x 的邻域 $U(x)$ 和连续映射

$$\theta:U(x)\to \mathrm{Emb}^r(D^k,M)$$

满足

$$\theta(y)(D^k)=D_y,\quad \theta(y)(0)=y,\quad \forall\ y\in U(x)$$

这里 $\mathrm{Emb}^r(D^k,M)$ 表示从 D^k 到 M 的所有嵌入组成的空间. 它是 $C^r(D^k,M)$ 的开子集.

有以下稳定流形和不稳定流形定理

定理5.12 设M是光滑Riemann流形,$\Lambda\subset M$是紧致集,$f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant 1)$ 以 Λ 为其双曲不变集,$T_\Lambda M=E^s\oplus E^u$ 是由 f 在 Λ 的双曲性条件给出的 Whitney 和分解,则存在 C^r 嵌入圆盘的连续族 $\{D_x^s\}_{x\in\Lambda}$ 和常数 $k>0,0<\lambda<\mu<1,\varepsilon>0$,满足

(Ⅰ) $T_xD_x^s=E_x^s\qquad \forall\ x\in\Lambda$

(Ⅱ) $\forall\ y\in D_x^s$

$$d(f^n(y),f^n(x))\leqslant k\lambda^n d(x,y),\quad n=1,2,\cdots \tag{5.60}$$

(因而 $D_x^s\subset W^s(x,f)$)

(Ⅲ) $\forall\ y\in D_x^s\cap B(x,\varepsilon)$

$$d(f(y),f(x))\leqslant \mu d(y,x) \tag{5.61}$$

(Ⅳ) $D_x^s\cap B(x,\varepsilon)=W_\varepsilon^s(x,f)$

(因而 $W_\varepsilon^s(x,f)$ 是 C^r 嵌入子流形)

这里 $B(x,\varepsilon)=\{y\in M \mid d(y,x)<\varepsilon\}$ 是度量空间中以 x 为球

心，ε 为半径的开球.

定理5.13 设M是光滑Riemann流形，$\Lambda\subset M$是紧致集，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geq 1)$以$\Lambda$为其双曲不变集，$T_\Lambda M=E^s\oplus E^u$ 是由 f 在 Λ 上的双曲性条件给出的 Whitney 和分解，则存在 C^r 嵌入圆盘的连续族$\{D_x^u\}_{x\in\Lambda}$和常数 $K>0, 0<\lambda<\mu<1, \varepsilon>0$，满足

(Ⅰ) $T_x D_x^u = E_x^u \qquad \forall\, x\in\Lambda$

(Ⅱ) $\forall\, y\in D_x^u$

$$d(f^{-n}(y), f^{-n}(x))\leqslant K\lambda^n d(y,x) \quad n=1,2,\cdots \tag{5.62}$$

(因而 $D_x^u\subset W^u(x,f)$)

(Ⅲ) $\forall\, y\in D_x^u\cap B(x,\varepsilon)$

$$d(f^{-1}(y), f^{-1}(x))\leqslant \mu d(y,x) \tag{5.63}$$

(Ⅳ) $D_x^u\cap B(x,\varepsilon)=W_\varepsilon^u(x,f)$

(因而 $W_\varepsilon^u(x,f)$是 C^r 嵌入子流形)

由上述两个定理得局部稳定和局部不稳定流形

$$W_\varepsilon^s(x,f)=\{y\in M\,|\,d(f^n(y),f^n(x))<\varepsilon, n=0,1,2,\cdots\} \tag{5.64}$$

$$W_\varepsilon^u(x,f)=\{y\in M\,|\,d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))<\varepsilon, n=0,1,2,\cdots\} \tag{5.65}$$

六. 横截同宿点与马蹄

对马蹄映射 φ 的不变集 Λ 中每一点 x，可定义一个双向序列$\{s_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$，它的元是 0 或 1.

$$S_n(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } \varphi^n(x)\in V_0\\ 1 & \text{若 } \varphi^n(x)\in V_1\end{cases}$$

这样，从 x 引出的轨道与双向序列$\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$一一对应.

另一方面，$x\in M$，若它对另一双曲点 P 的稳定流形 $W_\varepsilon^s(P,\varphi)$ 和不稳定流形 $W_\varepsilon^u(P,\varphi)$交于点 x，即 $x\in W_\varepsilon^s(P,\varphi)\cap W_\varepsilon^u(P,\varphi)$，则称 x 是 φ 的一个同宿点. 若 $W_\varepsilon^s(P,\varphi)$与 $W_\varepsilon^u(P,\varphi)$是横截相交的，则称 x 是一个横截同宿点.

就二维流形 M 而言，已证明如下重要结果：若一系统有一横截同宿点，则必然出现马蹄现象，因此必然出现混沌.

七. 渐近周期点

对于某些函数 f，一个点的迭代的渐近性态可以借助于研究周期点来了解. 以 Logistic 模型(5.29)为例，对 $r\in[0,1]$，$x=0$ 是唯一的周期为 1 的周期点，即不动点. 事实上，对 $x\in[0,1]$ 当 $n\to\infty$ 时，$f^n(x)\to 0$. 对 $r\in[1,3]$，有两个周期为 1 的点，即 0 和 $1-r^{-1}$. 对 $x\in(0,1)$，当 $n\to\infty$ 时，$f^n(x)\to 1-r^{-1}$. 对 $r>3$，有两个周期 2 的点，记为 p 和 q，则 $f(p)=q$，$f(q)=p$. 对于 $r\in(3,1+\sqrt{6})$ 和 $x\in(0,1)$ 时，$f^{2n}(x)$ 收剑到 p 或 q 之一，而 $f^{2n+1}(x)$ 收剑到 p 或 q 的另外一点. 除了那些 x 以外，对其余的点 x，存在一个 n，使得 $f^n(x)$ 等于周期 1 的点 $1-r^{-1}$，这样的点只有可数个. 因此那些 $\{f^n(x)\}$ 的性态可由研究周期点得到.

对 $r>1+\sqrt{6}$，有 4 个周期为 4 的点，对于稍大于 $1+\sqrt{6}$ 的 r，除了某些 n 以外，$f^{4n}(x)$ 趋于这 4 个点之一，$f^n(x)$ 等于周期 1 或周期 2 的点之一. 因此可以说，[0,1] 中的每点是渐近周期的.

对于使每个点是渐近周期的那些 r 值，只需研究周期点以及它们的稳定性就够了. 对任一函数 f，若对某区间 $I=(y-\delta,y+\delta)$ 有

$$|f^k(x)-y|<|x-y| \quad \forall\, x\in I$$

则说具有周期 k 的点 $y\in I$ 是渐近稳定的. 当 f 在点 $y, f(y), \cdots, f^{k-1}(y)$ 处可微时，简单条件

$$\left|\frac{d}{dx}f^k(x)\right|<1$$

将保证这个渐近稳定性态. 由链规则

$$\frac{d}{dx}f^k(y)=\frac{d}{dx}f(f^{k-1}(y))\frac{d}{dx}f^{k-1}(y)$$

$$=\frac{d}{dx}f(f^{k-1}(y))\cdot\frac{d}{dx}f(f^{k-2}(y))\cdots\frac{d}{dx}f(y)$$

$$=\prod_{n=0}^{k-1}\frac{d}{dx}f(y_n)$$

这里 $y_n=f^n(y)$表示 f 的第 n 次迭代,因此若

$$\left|\prod_{n=0}^{k-1}\frac{d}{dx}f(y_i)\right|<1,\quad y_i=f^i(y)$$

则 y 是渐近稳定的. 但这一条件不能保证不从"接近"周期点和它的迭代点开始迭代的点的极限性态.

当 r=3.627 时,f 有周期 6(x 近似为 0.498)的周期点(是渐近稳定的). 于是这 x 是 f^2 的周期 3 的点,因此可将定理 5.2 用于 f^2,因为 f^2 有非渐近周期点,因此对 f 亦然.

由 Sharkovskii 定理可知,f 有$\lhd 6$ 的周期点. 从 Sharkovskii 序看到,这时有无穷多个周期点. 故 f 的不变集是 Li-Yorke 意义下的混沌集.

限于篇幅,§2、§3 两节中只给出了微分动力系统的有关结果. 其证明可参阅张筑生的著作(参考书 9).

§4 分形吸引子

不严格地说,一个吸引子就是一个集合,使得附近的所有轨道都收剑到这个集合上. 在动力系统理论中,精确的定义是根据作者的不同而变化的. 我们先给出一个最简单最直观的描述.

称 D 的子集 Λ 为 f 的一个吸引子,如果 Λ 是 f 的一个闭不变集且对包含 Λ 的一个开集 G 中的一切点 x,$f^k(x)$到 Λ 的距离随 k 趋于无穷而趋于零. G 叫做 Λ 的吸引域,通常 Λ 是极小集.

通常的吸引子有不动点、极限环、极限环面等.

Λ 称为一个"分形吸引子"或"奇怪吸引子",如果吸引子 Λ 有

无穷折叠和嵌套的几何结构;一般有非整数的分形维数;轨道对初始条件有敏感的依赖性.

后面我们将给出茹厄勒(D. Ruelle)关于吸引子的定义

一. 洛伦兹(H. E. Lorenz)吸引子

动力系统中最早和最有名的分形吸引子是洛伦兹吸引子.考虑位于两个平行平面间具有一致深度的液体层.设上下两表面的温差为常值.当底部加热时,流体的对流可用下述三阶常微分方程组表示

$$\begin{cases} \dot{x}=\sigma(-x+y) \\ \dot{y}=\rho x-y-xz \\ \dot{z}=-\beta z+xy \end{cases} \tag{5.67}$$

式中 β 是与上下平面间无量纲距离有关的常数,σ 是普朗特(Prandtl)数,ρ 是雷洛(Rayleigh)数,它是系统的主要控制参数.

设 φ 是由方程组和初值条件确定的动力系统. Lorenz 证明存在包含原点的单连通区域 $D\subset\mathscr{R}^3$. D 边界上的向量均指向内侧,所以存在含于 D 的吸引集

$$\Lambda=\bigcap_{t\leq 0}\varphi_t(D)$$

当 $\rho<1$ 时,原点是全局吸引的,所有轨道都趋于它.当 $\rho>1$ 时,系统有两个非平凡的不动点 p_+, p_-.

$$p_\pm=(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\rho-1)$$

若 $\sigma<\beta+1$,则这两个不动点是稳定的.若 $\sigma>\beta+1$,则当 $1<\rho<\rho_h$ 时两不动点稳定,而当 $\rho>\rho_h$ 时两不动点是不稳定的.这里

$$\rho_h=\sigma(\sigma+\beta+3)/(\sigma-\beta-1)$$

系统当 $\rho=\rho_h$ 时在 $p_\pm$ 处产生 Hopf 分岐.考虑 p_+ 和 p_- 的不稳定流形,系统线性化的特征值是

$$\lambda=-(\sigma+\beta+1),\quad \lambda=\pm i\sqrt{2\sigma(\sigma+1)(\sigma-\beta-1)}$$

可知 $W_\varepsilon^u(p_+,\varphi)$，$W_\varepsilon^u(p_-,\varphi)$ 是二维流形，而原点 p 的不稳定流形 $W_\varepsilon^u(p,\varphi)$ 是一维的. 它们都包含在 Λ 中. 所以这时 Λ 的结构很复杂.

系统(5.67)以一个常速率压缩体积. 在一个边长为 δ 的小坐标盒的相对面上速度差近似为 $\delta(\partial\dot{x}/\partial x)$，$\delta(\partial\dot{y}/\partial y)$，$\delta(\partial\dot{z}/\partial z)$. 盒的体积变化率是 $\delta^3(\partial\dot{x}/\partial x+\partial\dot{y}/\partial y+\partial\dot{z}/\partial z)=-(\delta+\beta+1)\delta^3$. 因为系统散度 $-(\sigma+\beta+1)<0$，说明吸引集 Λ 具有零体积. Lorenz 研究了当 $\sigma=10,\beta=8/3,\rho=28$（这时 $\rho_h\approx24.74$）时系统的行为，通过计算机观察到 Λ 的许多奇异性质.

（Ⅰ）Λ 中任何轨道都是不稳定的.

（Ⅱ）Λ 含有不可数无穷多个在 Λ 中稠密的轨道.

（Ⅲ）Λ 的周期轨是稠密的.

（Ⅳ）轨道对初值有敏感的依赖性. 即任意两轨道不论其初始点如何靠近都将随 t 的增加而截然不同.

图 5.4 是由计算机绘制的 Lorenz 方程的一个周期轨，它基本上刻画了 Lorenz 吸引子的形状. 从图形可以看到，它包含了两个"圆盘"，每一个都是由螺线轨道构成的. 某些轨道几乎是垂直地离开圆盘中的每一个而进入另一个圆盘中. 若计算轨道 φ_t，知道随着 t 的增

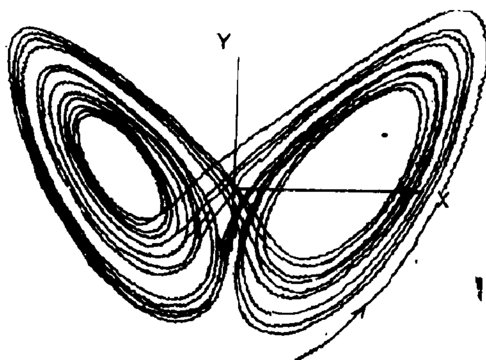


图 5.4　Lorenz 吸引子

加，φ_t 先绕一个圆盘几圈，然后"跳"到另一个圆盘中．绕第二个圆盘几圈后又跳回原来的圆盘．并以这种方式继续下去，在离开每个圆盘之前所绕的圈数是一个明显的随机数．洛伦兹吸引子显然是一个分形，对 $\sigma=10,\beta=8/3,\rho=28$ 时通过数量估计，吸引子维数大约是 2.06. Lorenz 吸引子轨道的运动状态似乎是混沌的，对初始条件具有敏感的依赖性．将(5.67)作为描述大气对流的模型，Lorenz 将系统对初始条件的敏感依赖性解释为蝴蝶效应，并曾形象地讲过："可预言性：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？"．蝴蝶效应说明，对天气作长期精确预报是不可能的．

连续动力系统分形吸引子的另一例子是 Rössler 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-z\\ \dot{y}=x+ay\\ \dot{z}=b+z(x-c)\end{cases}\tag{5.68}$$

若固定 $b=2,c=4$，吸引子的性质随 a 的变化而变化．当 a 很小时，吸引子是一条简单闭曲线(极限环)，但随着 a 的增加，这条曲线分裂成一个两圈的环，继而分裂成四圈的环等等．这样，一类倍周期现象出现了．当 a 达到 0.375 时，有一个带状形式的吸引子，这个带在其内有一个扭转，非常象 Möbius 带．它从倍周期分岐走向混沌的分析将在下一节给出．

前面给出了奇异吸引子的描述和例子．奇异吸引子一直未得到严格定义．前面谈到，即使吸引子，各种文献中也不一致，下面介绍 Ruelle 的定义．

设 M 是有限维 Riemann 流形，$f:M\to M$ 是连续映射．M 的一非空子集 Λ 称为f的吸引集，如果 Λ 有紧邻域U满足 $\Lambda=\bigcap_{k=0}^{\infty}f^k(V)$，而且对充分大的 n 均有 $f^n(U)\subset U$. U 称为 Λ 的一个基本邻

域，开集 $W=\bigcup_{n=0}^{\infty}f^{-n}(U)$ 称为 Λ 的吸引域或者吸附域，它与 U 的选择无关. $W=\{x\in M\,|\,f^n(x)\to\Lambda, n\to\infty\}$.

吸引子是链回归意义下吸引集的不可约分解. $\forall a, b\in M$，称 $a>b$ 当且仅当 $\forall \varepsilon>0$，有一个从 a 到 b 的 ε－伪轨，$>$ 称为链回归走向，或者 a 走向 b. 链回归等价 $a\sim b$ 指 $a>b$ 且 $b>a$. 这样 $\forall a\in M$ 都按链回归等价意义对应于 M 的一个子集[a]，称为等价类，吸引集的链回归等价类的划分获得吸引子. 显然，吸引集中至少包含一个吸引子.

定理 5.14 一吸引集 Λ 是一个吸引子当且仅当它是链回归的.

按 Ruelle 的方式定义的吸引子在 f 的小扰动下具有某种稳定性. 在这种意义下考虑，由计算机产生的吸引子确实也是"理论上的"吸引子.

关于吸引子的奇异性，古肯海默(J. Guckenheimer)等的定义，是根据其中是否含有横截同宿轨而言的. 一个结果是横截同宿轨导致某种类型的转移或马蹄结构，也就是 Li－Yorke 定理描述的混沌不变集.

有了吸引子的概念，我们还可以给出混沌的另一直观描述，如果下列条件都成立，则函数 f(或系统)在不变集 Λ 上无疑地被认为是混沌的.

(Ⅰ) Λ 是 f 的分形吸引子.

(Ⅱ) f 的周期点在 Λ 中稠密.

(Ⅲ) $\exists x\in\Lambda$，轨道 $\{f^k(x)\,|\,k\in Z_+\}$ 在 Λ 中稠.

(Ⅳ) f 对初始条件有敏感的依赖性. 即 $\forall x\in\Lambda$，都存在正数 δ 及任意接近 x 的 y 和整数 k 使得 $|f^k(x)-f^k(y)|\geq\delta$. 即是说，在初始时非常接近的点在 f 的迭代下并不能保持其接近性.

条件(Ⅰ)是混沌系统整体稳定和局部不稳定折中的结果. 分

形吸引子具有整体稳定性、低维性和非周期性(局部不稳定)等合适的性质. 稳定性代表在有噪声的世界中动力系统的最终状态,低维性说明系统的轨道落入长方形或方盒子式的只有少数几个自由度的相空间中. 而非周期性(或局部不稳定性)说明轨道处于永久的动态,永不自我重复和自我相交. 从几何上讲这是一个难题:在有限的空间中画出永不重复永不自交的轨道,或者说在有限的面积内画出无穷长的线;在有限体积内画出无穷大的表面. 矛盾斗争的结果,只能象 Koch 曲线或 Sierpinski 海绵那样,无限扭曲、折叠和嵌套起来,也就是说,它必须是一个分形. 条件(Ⅰ)暗示了Λ不存在极小集.(Ⅲ)描绘了在Λ的结构上规则性的轮廓.(Ⅳ)与 Li—Yorke 定理第二部分是等价的,反映了Λ上的点经迭代后的不可预见性,它暗示了对 f 的轨道作精确持久的数值逼近是不可能的. 因此,若自然界的现实系统的动态可约化为这样的混沌函数(如生物种群 Logistic 模型中的函数 $f_r(x)$),则对这种混沌系统的长期性态作精确预测是不可能的.

二. 依侬(M. Hénon)吸引子

现在我们介绍一些离散动力系统产生的吸引子. 一个有影响的吸引子是 Hénon 吸引子,它是法国天文学家 Hénon 在 1976 年发现的.

考虑标准的二次映射 $f:\mathscr{R}^2\to\mathscr{R}^2$

$$f(x,y)=(y+1-ax^2,bx) \tag{5.69}$$

的迭代,其中 a 和 b 是常数.

如果没有耗散,相空间就不会折叠和收缩得产生无穷的分形层次,就永远不会出现分形那样的奇怪吸引子. 然而在(5.69)中取 $a=1.4,b=0.3$ 作数值研究,对这些值存在一个四边形D,使得 $f(D)\subset D$. 将注意力限制在此区域上,$\forall\ (x,y)\in\mathscr{R}^2$,这个映射的 Jacobi 行列式的值为 $-b$,其面积在 $\mathscr{R}^2$ 上以常曲率收缩. 对坐标

作线性变换，式(5.69)是具有这种性质的最一般的二次映射. 它可以分解成一个保积的弯曲变换，一个压缩变换和一个反射变换的组合，最终效果是变得象马蹄形. 当 $a=1.4, b=0.3$ 时，依侬的数值研究发现了系统的一个吸引集，它可看成原点的不稳定流形 $W_\varepsilon^u(0,f)$ 的极限集，是一个分形吸引子，称作 Hénon 吸引子，如图 5.5 所示.

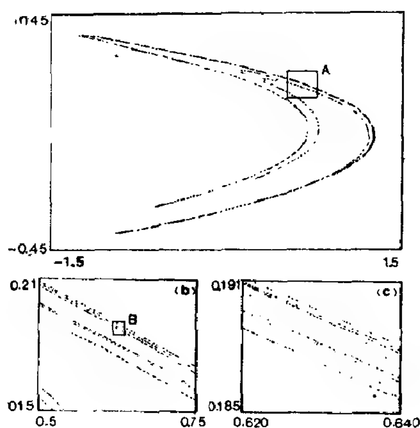


图 5.5 Hénon 吸引子

精确的图象表明 Hénon 吸引子的带状特征. 在局部它是类 Cantor 集与直线段的笛卡尔积，显示出某种自相似性. 数值估计得到其盒维约数为 1.26.

Hénon 映射的精确分析十分困难，其动态性质还不完全清楚，特别随 a 和 b 变化时在分岐性质上发生的变化是十分复杂的. 下节我们将给出它在 $b\leqslant 1$ 时较详细的性态分析.

三. 劳威尔(H. A. Lauwerier)吸引子

劳威尔映射是马蹄映射的变形：

$f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ 定义为

$$f(x,y)=(bx(1-2y)+y, 4y(1-y)),\quad 0<b\leqslant 1 \tag{5.70}$$

而求得它的两个双曲不动点 $(0,0)$，$(3/(4+2b), 3/4)$，它们的稳定流形分别是线段 $y=0$ 和 $y=3/4$，其不稳定流形也可以求出. $O(0,0)$ 的不稳定流形 $W_\varepsilon^u(O,f)$ 是映射的不变曲线.

$$
W_\varepsilon^u(O,f):\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{b}-1)\sum\limits_{k=1}^{\infty}b^k\varphi_k(t) \\ y=\sin^2(t/2),t\geqslant 0 \end{cases} \tag{5.71}
$$

式中

$$
\varphi_k(t)=\frac{\sin t}{2^k\sin(2^{-k}t)},\quad k=1,2,\cdots.
$$

另一不动点 $P(3/(4+2b),3/4)$的不稳定流形

$$
W_\varepsilon^u(P,f):\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{b}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)(\dfrac{b}{2})^k \\ y=\sin^2(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{t}{2}),\quad -\infty<t<\infty \end{cases} \tag{5.72}
$$

式中

$$
\psi_k(t)=\frac{\sin(2\pi/3+t)}{(-2)^k\sin(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{t}{(-2)^k})}
$$

不稳定流形的极限集(闭包)是典型的分形吸引子. 可以证明,这一分形吸引子与水平线的截口是一紧致的不可数的完全集,当 $0<b<1/2$ 时是完全不连通的零测度集,因而同胚于三分 Cantor 集,即它是 Cantor 型的.

推广到更一般情形,可以研究一类映射的迭代,如

$$
\begin{cases} x_{n+1}=bx_n+(1-b)y_n \\ y_{n+1}=f(y_n) \end{cases} \tag{5.73}
$$

其中 $f(0)=0,0<b<1$. 鞍点 $O(0,0)$的不稳定流形

$$
W_\varepsilon^u(O):\begin{cases} x=(\dfrac{1}{b}-1)\sum_{k=1}^{\infty}b^k\varphi(t/a^k) \\ y=\varphi(t) \end{cases} \tag{5.74}
$$

式中 $\varphi(t)$是满足一定条件的周期函数.

研究表明,许多映射的奇异吸引子都是具有分数 Hausdorff 维数的分形集,吸引域的边界也显示出分形结构. 下述映射就是如此.

四. 格里波基—沃特—约克(Grebogi—Ott—Yorke)吸引子

考虑下述映射的迭代

$$\begin{cases}\theta_{n+1}=2\theta_n \quad (\mathrm{mod}2\pi)\\ z_{n+1}=\alpha z_n+z_n^2+\beta\cos\theta_n\end{cases} \tag{5.75}$$

这一映射有两个不动点$(0,z_b)$，$(0,z_c)$，其中

$$z_b=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)^2-4\beta}$$

$$z_c=\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)^2-4\beta}$$

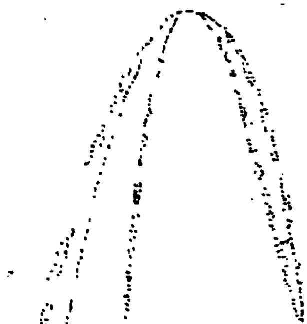


图5.6 Grebogi－Ott－Yorke 吸引子和吸附界

两个不动点分别在吸引域边界和吸引子上. 当$\alpha=0.5$，$\beta=0.04$时，吸引子和吸附界(即吸引域的边界)如图5.6所示. 因为对于充分大的$|z|$，$z_{n+1}>z_n^2$，所以z的轨道趋近于$z=+\infty$，说明$z=+\infty$是这一映射的一个吸引集. 又因为在带形区域$|z|\leqslant z_c=0.1$上，这映射映到自身，而θ相当于符号动力系统的移位映射，它是Li－Yorke意义下混沌的. 所以这一区域中的吸引集是混沌的. 对z_n进行估计可知吸附界的上半部分位于带形$\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant z_c$内. 由于映射限制于此带形区域时在$z$方向是扩张的，即$\frac{\partial}{\partial z_n}(\alpha z_n+z_n^2+\beta\cos\theta_n)>1$，所以每一竖线段映入更长的线段且穿过带形区域. 因而对每一θ，有唯一的值$z(\theta)$使得点$(\theta,z(\theta))$在映射下恒留于带形区域，所得曲线$\{(\theta,z(\theta)\,|\,\theta=\theta\mathrm{mod}2\pi\}$是映射的不变集. 它是$z=\infty$吸引点和有界吸引集的吸附域的分界线，即吸附界. 下半平面的吸附界是前一吸附界曲线的逆象之一，另一逆象是其自身. 利用扰动方法可以证明，$|\beta|<<1$时，吸附界曲线是Weierstrass函数的图象. 事实上，将$z(\theta)$写成β的函数.

$$z(\theta)=z_0(\theta)+\beta z_1(\theta)+\beta^2 z_2(\theta)+\cdots$$

而

$$z(2\theta)=\alpha z(\theta)+z(\theta)^2+\beta\cos\theta$$

比较 $1,\beta,\beta^2,\cdots,\beta^n,\cdots$的系数，得

$$z_0(\theta)=1-\alpha$$

$$z_1(2\theta)=\lambda z_1(\theta)+\cos\theta$$

$$z_n(2\theta)=\lambda z_n(\theta)+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 1}} z_i(\theta)z_j(\theta)$$

$$n=2,3,\cdots$$

式中 $\lambda=2-\alpha$. 由 z_1 的函数方程求得

$$z_1(\theta)=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+1)}\cos 2^k\theta$$

当 $1<\lambda<2$ 时，它是 Weierstrass 函数，其 Hausdorff 维数 $D_H=2-\ln\lambda/\ln 2$. 当 $|\beta|$ 相当小时，$z(\theta)$的性质取决于 $z_1(\theta)$.

设 $z_1(\theta),\cdots,z_{n-1}(\theta)$均已表成 Fourier 级数，则

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 1}} z_i(\theta)z_j(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}\cos k\theta$$

常数 $a_k^{(n)}$ 仅与 $a_k^{(n-1)},a_k^{(n-2)},\cdots,\quad k=0,1,\cdots,\infty$有关. 假设对固定的 n，$a_k^{(n)}\to 0\quad(k\to\infty)$，则可以从函数方程中求得如下 $z_n(\theta)$的 Fourier 级数.

$$z_n(\theta)=\frac{a_0^{(n)}}{1-\lambda}-\frac{1}{\lambda}\sum_{p=1}^{\infty}a_{2p-1}^{(n)}\cos(2p-1)\theta-\frac{1}{\lambda}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^p}\left(\sum_{m=0}^{p}\lambda^m a_{(2q-1)2m}^{(n)}\right)\cos(2q-1)2^p\theta$$

它也是连续但不可微的函数.图 5.7 是按扰动方法得到的函数$z(\theta)\approx z_0(\theta)+\beta z_1(\theta)+\beta^2 z_2(\theta)+\beta^3 z_3(\theta)$的图象. 分

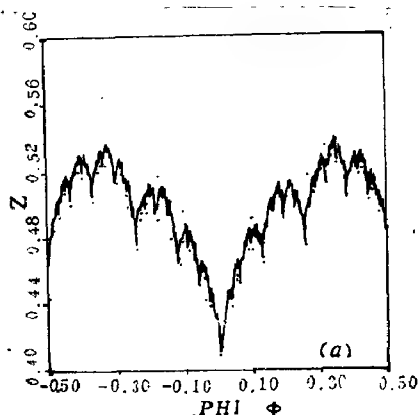


图 5.7 Weierstrass 曲线

形吸附界的维数将在下节给出.

§5. 混沌运动与奇异吸引子的定量描述

在本节,我们介绍 Lyapunov 指数,不变测度和熵. 讨论它们和维数的联系,对混沌运动和分形吸引子进行定量描述.

一. Lyapunov 指数

我们知道,在迭代

$$x_{n+1}=f(x_n) \tag{5.76}$$

的作用下,邻点的分离导致混沌运动. 设从 x_0 和 $x_0+\varepsilon$ 两个相邻的初始点出发得到两个迭代序列 $\{f^n(x_0)\}$ 和 $\{f^n(x_0+\varepsilon)\}$, 它们按指数分离,即

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)}=|f^n(x_0+\varepsilon)-f^n(x_0)|$$

在极限情形

$$\begin{aligned}\lambda(x_0)&=\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{f^n(x_0+\varepsilon)-f^n(x_0)}{\varepsilon}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{df^n(x_0)}{dx_0}\right|\end{aligned} \tag{5.77}$$

$\lambda(x_0)$ 称作动力系统(5.76)的 Lyapunov 指数. 它量度了两条轨道的指数分离程度,因此是轨道不稳定性的量度. 在 $\lambda>0$ 的方向,轨道迅速分离,长时间行为对初始条件敏感,运动状态是混沌的;$\lambda<0$ 的方向,相体积收缩,运动稳定,对初始条件不敏感;$\lambda=0$ 对应稳定边界,初始误差既不放大也不缩小.

由(5.76)和链规则(5.66)知,用(5.77)表示的 $\lambda(x_0)$ 可以写成

$$\lambda(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln|f'(x_i)| \tag{5.78}$$

由此可见,Lyapunov 指数也量度了一次迭代后的信息的平均损失. 当 $|f'(x)|$ 随点而改变时,多次迭代后,信息的平均损失

$$\overline{\triangle I} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log_2|f'(x)| \tag{5.79}$$

从(5.78)和(5.79)得到

$$\lambda(x_0) = -\ln 2 \cdot \overline{\triangle I}$$

即就绝对值而言 $\lambda(x_0)$与信息平均损失成正比. $\lambda(x_0)>0$ 即体积膨胀,结构被放大,分辨率增加就意味着信息不断产生. 而 $\lambda(x_0)<0$ 为体积收缩,意味着信息损失或被破坏.

例 5.5 三角映射

$$\triangle(x) = r(1-2|1/2-x|) \tag{5.80}$$

可求得其 Lyapunov 指数 $\lambda=\ln 2r$. $r>1/2$ 时 $\lambda>0$;而 $r<1/2$ 时 $\lambda<0$. Lyapunov 指数在 $r=1/2$ 处改变符号,其作用类似于序参数,意味着系统在 $r=1/2$ 处进入混沌性态.

对于 d 维动力系统,有 d 个李指数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_d$. λ_i 表征了第 i 个方向上轨道的分离程度,一般设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_d$. $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_d)$ 称作李指数谱.

李指数的符号或李指数谱在区分吸引子性质时很有用. 以 3 维情形为例. 对稳定不动点,3 个李指数都为负,即其谱为(—,—,—,),表示 3 个方向上轨道都收敛;对于极限环,指数谱为(0,—,—,),表示沿极限环方向,轨道不发散也不收敛,而在其它两个横截极限环方向轨道收敛到极限环上;而对极限环面,指数谱为(0,0,—),两个指数为 0 表示两个频率 ω_1 和 ω_2 的准周期运动. 而对于分形吸引子,至少有一个李指数大于零,轨道沿这个方向发散. 由于保守系统体积不变,耗散系统体积收缩,因此轨道最终要收缩到相空间的有限区域或吸引子上. 这两种矛盾运动折中的结果,轨道只能无限次地折迭起来,使吸引子成为分形集. 其分维与李指数的关系有著名的 Kaplan—Yorke 猜测:若 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\lambda_j\geqslant 0>\lambda_{j+1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_d$,则 Lyapunov 维数

$$D_L = j + \sum_{i=1}^{j} \lambda_i / |\lambda_{j+1}| \tag{5.81}$$

Russel 等人就依依映射进行数值检验并就某些吸引子证明 $D_L = D_H$. Ledrappier 证明 $D_H \leqslant D_L$. 在二维情形，Young 证明 $D_H = D_L$. 在高维情形已有许多例子说明 $D_H \neq D_L$. 关于(5.81)可用范围的研究仍是一个很活跃的领域.

对于上节中的劳威尔映射，其两个李指数 $\lambda_1 = \ln 2, \lambda_2 = \ln \frac{b}{2}$，因而

$$D_L = 1 + \ln 2 / |\ln \frac{b}{2}|$$

例 5.6 动力系统(5.75)的 Lyapunov 维数

为计算(5.75)的混沌吸引集的分形吸附界的维数，可求出沿 z 轴的 Lyapunov 指数

$$\sigma_z \approx \ln\lambda - L\beta^2 - M\beta^3$$

这里

$$L = \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)}, \quad M = \frac{(\lambda^3 + 2)(8\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 2)}{3\lambda^4(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1)}$$

先求吸附界沿 z－方向的维数. 在 $\theta = \theta_0$ 处，沿 z－方向的长度为 L 的线段在逆映射之下缩短为 L/δ_0，其中 $\delta_0 = a + 2z(\theta_0)$，作用 n 次后长度为 $L/\triangle(\theta_0)$， $\triangle(\theta_0) = \delta_0\delta_1 \cdots \delta_{n-1}$. 而 θ 方向上长度缩减为原来的 $1/2^n$. 若以直径为 $\varepsilon_n = 1/2^n$ 的正方形覆盖吸附界，所需正方形的数目最小约为

$$N(\varepsilon_n) = L / \triangle(\theta_0)\varepsilon_n$$

所以其盒维数

$$D_z = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln N(\varepsilon) / \ln 1/\varepsilon = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n \ln 2} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |a + 2z_i|$$

由李指数的定义得到

$$D_z = 1 - \sigma_z / \ln 2$$

由此得吸附界曲线的分维 $D = 1 + D_z = 2 - \sigma_z/\ln 2$. 可计算每一

曲线 $z_i(\theta), i=1,2,\cdots$，它们的分维都为 $D=2-\ln\lambda/\ln 2$，但其组合 $z(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n z_n(\theta)$ 的维数却与此不同.

二. 不 变 测 度

不变测度 $\rho(x)$ 决定了如下么模映射迭代的密度

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_n\in[0,1], \quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.82}$$

$\rho(x)$ 定义为

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\delta[x-f^i(x_0)]$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为 δ 函数.

若 $\rho(x)$ 与 x_0 无关，则系统称作遍历的. 这时 $g^i(x)$ 的"时间平均"可改写成不变测度平均

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}g(x_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}g[f^i(x_0)]=\int_0^1\rho(x)g(x)dx \tag{5.83}$$

这说明，如果相空间中的运动是遍历的，则关于稳定分布 $\tilde{\rho}$，可用 $\tilde{\rho}$ 的总体平均代替时间平均

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A[x(t)]dt=\int\rho(\vec{x})A(\vec{x})d\,\vec{x} \tag{5.84}$$

这里 A 是时间相关向量 $\vec{x}=\{\vec{p}(t),\vec{q}(t)\}$ 的函数，$\vec{p}$ 是广义动量，$\vec{q}$ 是广义坐标，它们满足 Hamilton 方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{5.85}$$

对 Hamilton 系统，一般密度分布 $\rho(\vec{x},t)$ 在相空间的动力学特性由下述 Liouville 方程描述

$$\rho(\vec{x},t)=-iL\rho(\vec{x},t) \tag{5.86}$$

式中

$$L=i\left(\frac{\partial H}{\partial\vec{p}}\frac{\partial}{\partial\vec{q}}-\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right) \tag{5.87}$$

是 Liouville 算子.

若映射(5.82)给出时间演化，则对应于这个一维模型的演化方程可以导出. 设初始点为 x_0，一次迭代后演化为 $f(x_0)$，这意味着 δ 函数分布 $\delta(x-x_0)$ 在一个时间步长后演化为 $\delta[x-f(x_0)]$. 于是

$$\delta[x-f(x_0)]=\int_0^1\delta[x-f(y)]\delta(y-x_0)dy \tag{5.88}$$

将上述结果推广到时刻 n 的任意密度 $\rho_n(x)$，即得到所谓 Frobenius－Perron 方程

$$\rho_{n+1}(x)=\int_0^1\delta[x-f(y)]\rho_n(y)dy \tag{5.89}$$

它支配 $\rho_n(x)$ 的时间演化. 因为方程(5.83)仅当 $\rho(x)$ 与时间 n 无关时才有意义，也就是说，$\rho(x)$ 是 Frobenius－Perron 算子的特征函数，其特征值为 1，所以不变测度 $\rho(x)$ 是稳定的. 从而

$$\rho(x)=\int_0^1\delta[x-f(y)]\rho(y)dy \tag{5.90}$$

形式上，上述方程有很多解，例如 $\delta(x-x^*)$，这里 $x^*=f(x^*)$ 是不稳定不动点. 但是只有一个解是恰当的. 若存在弱随机噪声时，找到非稳斥性不动点的概率是零，这种假的解被自动除去. 因此，以后说的不变测度 $\rho(x)$ 是恰当的不变测度，即当系统加上小的随机噪声时是稳定的.

例 5.7 $r=1$ 时的三角映射

$$\triangle(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant 1/2\\ 2(1-x) & x>1/2\end{cases} \tag{5.91}$$

的不变测度满足方程

$$\rho(x)=\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{x}{2}\right)+\rho\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]$$

显然它有正规解 $\rho(x)=1$ 且可证明解是唯一的.

这意味着 $r=1$ 的三角映射迭代的混沌序列 x_0，$f(x_0)$，$f(f(x_0))$，…一致地复盖区间[0,1]，因此系统是遍历的.

三. 柯尔莫哥洛夫熵

Kolmogorov 熵是在相空间中刻画混沌运动最重要的量度. 它可以区分规则运动，混沌运动和随机运动.

在统计热力学中，熵

$$S=-k_B\sum p_i \ln p_i \tag{5.92}$$

p_i 是系统处在状态 i 的概率. 熵 S 是系统无序程度的量度. 无序程度的增加对应于对状态可知性的减少. 根据 Shannon 的信息论，熵 S 可用来刻画我们对系统无知的程度. 只要 $S>0$，系统总存在一些我们无法认识的侧面.

根据 S 我们可以引入 Kolmogorov 熵，K 熵的定义如下：考虑奇异吸引子上动力系统的轨道 $\vec{x}(t)=(x_1(t),\cdots,x_d(t))$，设 d 维相空间被划分成大小为 l^d 的盒子，系统的状态可在时间 τ 的间隔内观测. 设 $p_{i_0\cdots i_n}$ 是 $\vec{x}(0)$ 在盒子 i_0 中，$\vec{x}(\tau)$ 在盒子 i_1 中，…，$\vec{x}(n\tau)$ 在盒子 i_n 中的联合概率. 根据 Shannon 公式，量

$$K_n=\sum_{i_0\cdots i_n} p_{i_0\cdots i_n} \ln p_{i_0\cdots i_n} \tag{5.93}$$

正比于以精度 l 确定系统在特殊轨道 $i_0^*\cdots i_n^*$ 所需要的信息，因此 $K_{n+1}-K_n$ 是已知系统先前处于 $i_0^*\cdots i_n^*$ 而预测系统将在单元 i_{n+1}^* 中所需的附加信息. 这意味着 $K_{n+1}-K_n$ 量度了系统从时间 n 到 n+1 的信息损失. K 熵定义为信息的平均损失率

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(K_{i+1}-K_i) \\ &= \lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}} P_{i_0\cdots i_{n-1}} \ln P_{i_0\cdots i_{n-1}} \end{aligned} \tag{5.94}$$

极限 $l\to 0$ 使得 K 与分划的选取无关. 对离散时间步长 $\tau=1$ 的映射，则将 $\tau\to 0$ 省略.

K 在混沌的量度中是很有用的. 对规则运动 K 变为 0；在随机系统中 K 为∞；若系统表现为确定性混沌，则 K 是大于 0 的常数. K 熵越大，那么信息损失速度越大，系统的混沌程度越大，或说系统越复杂.

对一维系统，K 恰为正的李指数. 对(5.29)，李指数随 r 而变

化，对规则运动，$\lambda(r)<0$；在分歧点 $\lambda(r)=0$；而在混沌区 $\lambda(r)>0$. 对高维系统，K 熵与李指数有关系

$$K=\int\rho(\vec{x})\sum_{i}\lambda_i^{+}(\vec{x})d^dx \tag{5.95}$$

式中 $\rho(\vec{x})$是吸引子的不变密度. 在大多数情形，λ_i 与 $\vec{x}$无关，这时积分变为求和

$$K=\sum_{i}\lambda_i^{+} \tag{5.96}$$

四. 从倍周期分岐到混沌

只要科学之所至，混沌好象无所不及. 那么系统究竟是如何从规则运动转入到混沌运动的呢？混沌运动有何普遍特征呢？这里我们论述倍周期分岐进入混沌的道路以及进入混沌后系统所表现出的普适规律.

从上一节知道，对(5.29)这一非线性系统，随着控制参数 r 的增加，系统振荡的周期在某一特定值上发生倍增. Rössler 吸引子也具有这种倍周期分岐，实际上这种现象在混沌运动中并非个别现象. 从倍周期分岐到混沌的普遍性首先由 Feigenbaum 发现，下面结合实例进行分析.

例 5.8 Rössler 吸引子(图 5.8)

在图 5.8 中(见下页)， A)的上面是一个极限环，对应 1P 的周期点，功率谱密度的峰值出现在基频 16Hz 及其倍频 32Hz，48Hz，…. B)是参数值增加后，极限环发生劈裂形成 2P 的周期轨道，功率谱密度值出现在分频 8Hz 及其倍频 16Hz，24Hz，…. 若参数值进一步增加，周期 2P 的轨道也将不稳定而进一步分岐出周期 4P 的轨道，对应功率谱在 4Hz 及其倍频上出现峰值. 以此类推，每一次分岐，周期都要加倍，即频率要缩小一倍. D)、E)、F)是系统进入混沌区以后，所发生的混沌带反向分岐过程，正好与周期倍增过程相反.

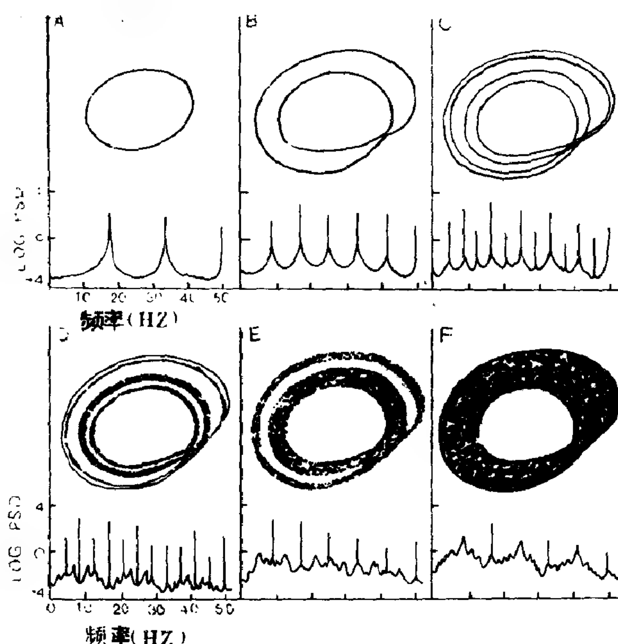


图 5.8 Rössler 吸引子的倍周期分岐及其在功率谱曲线上的反映

随着参数的连续变化，系统的行为不断地以周期倍增方式走向混沌，在 May 的虫口模型(5.29)中，在 Henon 映射和 Lorenz 系统中，在非线性电路的分频和混沌运动中，都存在由倍周期分岐通往混沌的道路.

例 5.9 Logistic 模型(虫口方程)的迭代

将分岐区的参数记为 $1<r<r_\infty$；混沌区参数 $r_\infty<r\leqslant 4$，如图 5.9 所示(见下页)，$r_\infty=3.5699456\cdots$. 在周期区有如下结果

i)在 r_n 值处，不动点个数从 2^{n-1} 增加到 2^n. 标度 r_n 满足

$$r_n = r_\infty - c\delta^{-n}, \quad n >> 1 \tag{5.97}$$

式中 c 为常数.

ii)最邻近 $x=\frac{1}{2}$ 的 2^n—环的距离 d_n 有常数比.

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \qquad n >> 1 \tag{5.98}$$

这里的 δ 和 α 为 Feigenbaum 常数，数值计算结果：

$$\delta = 4.6692\cdots$$

$$\alpha = 2.5029\cdots$$

在混沌区也有如下结果：

i)混沌区间通过反向分岐移动到一起，直到 $r=4$ 时迭代分布在整个区间[0,1]上.

ii)r—窗口由周期 P—环刻画($p \geqslant 6$)，具有连续分岐 P，2P，2^2P…对应的标度值 r 和(5.97)有相同的 δ 但常数 c 不同.

图 5.9 Logistic 映射的倍周期分岐

iii)在 $\bar{r} = \bar{r}_\infty - \bar{c}\bar{\delta}^{-n}$ 产生三倍周期 3^nP 和 4 倍周期 4^nP，具有不同的 Feigenbaum常数$\bar{\delta}$(如对 3^nP，$\bar{\delta} = 55.247\cdots$)，但仍是普适的.

下面我们讨论二维非线性映射迭代的Feigenbaum序列及其普适性. 考虑(5.69)中 $b=1$ 时 f 的迭代

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a x_n^2 - y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{5.99}$$

作坐标变换

$$x_n = -\frac{2}{a}\bar{x}_n + \beta; \quad a\beta^2 + 2\beta - 1 = 0; \quad c = -a\beta \tag{5.100}$$

则(5.99)变为

$$T\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{cases}y_{n+1}=x_n=T_y\\x_{n+1}=2cx_n+2x_n^2-y_n=T_x\end{cases}\tag{5.101}$$

T 的不动点为

$$x_1^*=y_1^*=0;\quad x_2^*=y_2^*=1-c\tag{5.102}$$

它们也是 T^2 的不动点,而且是方程

$$(cx+x^2)^2+c(cx+x^2)-x=0\tag{5.103}$$

的解.为解此方程,注意到 T 的不动点也是 T^2 的不动点,上述方程约化为一个二次方程,有解

$$x_{3,4}^*=y_{3,4}^*=\frac{1}{2}\left[-(c+1)\pm\sqrt{(c+1)(c-3)}\right]\tag{5.104}$$

不动点的稳定性由 T 的 Jacobi 矩阵

$$J(x^*,y^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T_x}{\partial x} & \dfrac{\partial T_x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial T_y}{\partial x} & \dfrac{\partial T_y}{\partial y}\end{bmatrix}_{(x^*,y^*)}=\begin{bmatrix}2c+4x^* & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\tag{5.105}$$

的特征值 $\lambda_{1,2}$决定.这里

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}J\pm\sqrt{(\mathrm{tr}J)^2-4}\right],\quad \mathrm{tr}J=2c+4x^*\tag{5.106}$$

trJ 表示 J 的迹(trace).

我们知道,$\det J=\pm1$时,T是保面积映射,代表保守系统,$-1<\det J<1$ 表示系统演化时相空间体积要收缩,因此代表耗散系统.这里 $\det J=1$,即有 $\lambda_2=1/\lambda_1$.这样,只须讨论两类本质不同的不动点:双曲不动点和椭圆不动点.

对双曲不动点,$\lambda_{1,2}$是实的且 $\lambda_1>1,\lambda_2<1$.即沿特征向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2$有

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^*\\y^*\end{bmatrix}+J\begin{bmatrix}\triangle x\\\triangle y\end{bmatrix}\tag{5.107}$$

$$J\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\triangle x\\ \triangle y/\lambda_1\end{bmatrix} \tag{5.108}$$

即是说，这一不动点是不稳定的. 因为不在稳定流形上的所有点都沿$\vec{e_2}$被驱离(x^*,y^*). 无穷次迭代后，需要考虑沿$\vec{e_2}$对不动点的逼进.

$$\lim_{n\to\infty} J^n\begin{bmatrix}0\\ \triangle y\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}0\\ (1/\lambda_1)^n\triangle y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.109}$$

对椭圆不动点，$\lambda_{1,2}$作为二次方程的解是复共轭的而且因为$\det J=\lambda_1^*\lambda_1=1$， 故可写成

$$\lambda_{1,2}=e^{\pm i\varphi} \tag{5.110}$$

经适当坐标变换可将 J 写成简单旋转

$$J\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix} \tag{5.111}$$

且不动点是稳定的. 这是因为在其近邻的每一点仍在近邻，J 决不能将它们驱离不动点.

由于特征值$\lambda_{1,2}$只依赖于线性变换矩阵的迹，因此得到如下稳定性准则：

$$\begin{aligned}&|trJ|<2\rightarrow\text{稳定不动点}\\ &|trJ|>2\rightarrow\text{不稳定不动点}\end{aligned} \tag{5.112}$$

由此得 T 的不动点的稳定性准则：

对 $x^*=y^*=0$，　$|trJ|=|2c|$，那么

当$|c|<1$ 时稳定

对 $x^*=y^*=1-c$，　$|trJ|=2|2-c|$，那么

当$|c|>1$ 时不稳定　(5.113)

对 T^2，类似于一维情形的链规则有

$$\begin{aligned}t_rJ_{T^2}&=t_r[J_T(x_3^*,y_3^*)\cdot J_T(x_4^*,y_4^*)]\\ &=2[-2(C+1)(c-3)+1]\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}2 & \text{当 } c=-1\\ -2 & \text{当 } c=1-\sqrt{5}\end{cases}\tag{5.114}$$

这里 J_{T^2} 表示 J^2 的 Jacobi 矩阵，而 $(x_3^*, y_3^*)=T(x_4^*, y_4^*)$.

综上述，(x_1^*, y_1^*) 是周期 1 的吸引子且对 $-1<c<1$ 稳定；(x_3^*, y_3^*) 是周期 2 的吸引子且对 $1-\sqrt{5}<c<-1$ 稳定，由此我们看到了分岐串联的开始.

现在我们论证导致了整个周期倍增序列的自相似性和 Feigenbaum 序列.

将(5.101)改写成

$$x_{n+1}+x_{n-1}=2cx_n+2x_n^2\tag{5.115}$$

上式在周期 2 的不动点邻近线性化

$$x_n^*=\frac{1}{2}[-(c+1)+(-1)^n\sqrt{(c+1)(c-3)}],\quad n=0,1,2,3\tag{5.116}$$

就得到

$$\triangle x_{n+1}+\triangle x_{n-1}=(2c+\triangle x_n^*)\triangle x_n-2(\triangle x_n)^2\tag{5.117}$$

上式中取 $n=2m+1$ 和 $n=2m-1$ 并相加，得

$$\begin{aligned}\triangle x_{2m+2}+\triangle x_{2m-2}=&-2\triangle x_{2m}\\&+(2c+4x_0^*)[\triangle x_{2m+1}+\triangle x_{2m-1}]\\&+2[(\triangle x_{2m-1})^2+(\triangle x_{2m+1})^2]\end{aligned}\tag{5.118}$$

(5.117)中令 $n=2m$ 则

$$\triangle x_{2m+1}+\triangle x_{2m-1}=(2c+4x_1^*)\triangle x_{2m}+2(\triangle x_{2m})^2\tag{5.119}$$

把上式和(5.118)相加，得

$$\triangle x_{2m+2}+\triangle x_{2m-2}=2c'\triangle x_{2m}+2a(\triangle x_{2m})^2+0[(\triangle x)^3]\tag{5.120}$$

引入标度变换 $x'_m=a\triangle x_{2m}$，有

$$x'_{m+1}+x'_{m-1}=2c'x'_m+2x'^2_m\tag{5.121}$$

这里

$$c' = 2(c+2x_1^*)(c+2x_0^*)-1 = 2c^2+4c+7 \tag{5.122}$$

$$a = 2(c+2x_1^*)+2(c+2x_0^*)^2 \tag{5.123}$$

比较(5.121)和(5.115)知：若二维映射在2—环邻近扩展到二阶，对结果进行标度变换就得到原来的映射，即$x^*=y^*=0$在$|c|<1$的稳定性蕴含了2—环$x_1^*=y_1^*=\triangle x=\triangle y=0$在$|c'|=|2c^2+4c+7|<1$或$1-\sqrt{5}<c<-1$的稳定性.

重复上述讨论，(5.121)对4—环也成立，…得到周期2^n—环的分岔串联且对$c_{n+1}<c<c_n$是稳定的，c_n满足递推公式

$$c_{n+1} = 2c_n^2+4c_n+7 \tag{5.124}$$

$\{c_n\}$称作Feigenbaum序列，其极限c_∞满足

$$c_\infty = 2c_\infty^2+4c_\infty+7 \tag{5.125}$$

解得$c_\infty=-1.2656$，计算机数值结果$c_\infty=-1.26631127$当参数值$c<c_\infty$以后，系统出现$2^\infty P$个周期，因此进入混沌状态.

Feigenbaum常数δ满足

$$c_n = c_\infty + A\delta^{-n}$$

代入(5.124)求得

$$\delta = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n+1}}{c_{n+1}-c_{n+2}} = -4c_\infty+4 = 9.06$$

计算机数值结果$\delta=8.72100872$.

另一个普适常数是标度因子$a=-4.128$，计算机数值结果$a=-4.018077\cdots$.

上述讨论说明，在二维非线性映射的迭代中，也存在从周期倍增通向混沌的道路，但Feigenbaum常数比一维情形大. 这里δ的物理意义仍然代表了分岐序列的收敛速度，a代表了自相似的几何结构每一次缩小的程度，它们都是普适常数，反映了保守非线性动力系统中一个共同的侧面.

对于耗散系统，也可得到类似结果. 这时周期2^nP的轨道分岐

的参数值满足

$$c_{n+1}=-2c_n^2+2c_n+2 \tag{5.126}$$

进入混沌的临界值 $c_\infty=-0.78077$，数值结果 $c_\infty=-0.7849$；Feigenbaum 普适常数的理论值 $\delta=5.12\cdots$，数值结果 $\delta=4.6692$，误差 9.7%；标度因子 a 的理论值 $a=-2.3399$，数值结果 $a=-2.502907$.

普适性好象混沌海洋中的盏盏明灯，为非线性系统动态行为的预测带来了曙光. 例如，若我们只知道两个分歧点 c_0 和 c_1，则预测系统进入混沌的参数值近似有

$$c_\infty=c_1+1.2725(c_1-c_0) \tag{5.127}$$

当参数值超过 c_∞ 后系统进入混沌状态，但混沌状态并非一片混乱. 这种表面无序现象的背后，隐藏着无穷嵌套的精细结构并表现出某种自相似性. 这就给分形几何提供了用武之地，各种分形维数给出了这些嵌套折迭结构复杂程度的量度.

§6 分形排斥子

对连续映射 f 的一个不变集 Λ，如果 Λ 附近且不在 Λ 中的所有点经过 f 的迭代后远离 f，那么 Λ 称作一个排斥子(repeller). 粗略地说，f 的排斥子 Λ 与 Λ 是 f 的逆映射 f^{-1}(可能是多值的)的吸引子是等价的. 若 Λ 具有奇异吸引子的几条性质，则称 Λ 是 f 的分形排斥子. 通过 f 的排斥子也能分析 f 的混沌性质.

例 5.10 帐蓬映射的排斥子

映射 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 定义为

$$f(x)=\frac{3}{2}(1-|2x-1|)$$

因为它的图成帐蓬形状(如图 5.10)，故称作帐蓬映射(tent

map). 很显然,f 把 $\mathscr{R}$ 以两点对一点的形式映射到$(-\infty,3/2)$上. 定义 $S_1,S_2:[0,1]\to[0,1]$如下:

$$S_1(x)=\frac{1}{3}x,\quad S_2(x)=1-\frac{1}{3}x$$

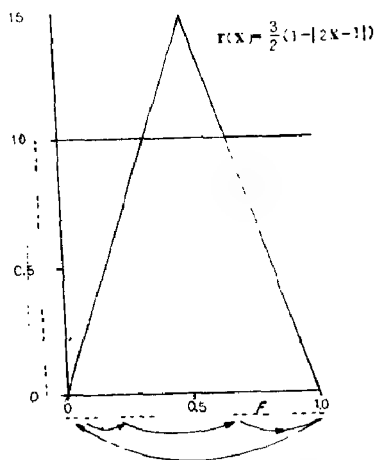


图 5.10 帐蓬映射及其排斥子

可见

$$f(S_1(x))=f(S_2(x))=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

即在$[0,1]$上,$f\circ S_1=f\circ S_2=\mathrm{id}$. 因此 S_1 和 S_2 是 f^{-1}的两个分支,S_1 和 S_2 在$[0,1]$上都是压缩映射. 存在唯一的紧不变集 Λ 满足

$$\Lambda=S_1(\Lambda)\cup S_2(\Lambda)\tag{5.128}$$

事实上,$\Lambda=\bigcap_{k=0}^{\infty}S^k([0,1])$,(这里$S^k(I)=S_1^k(I)\cup S_2^k(I)$, $I=[0,1]$),可见 Λ 是 $D_H=D_B=\log 2/\log 3$ 的三分康托集.

由(5.128)知 $f(\Lambda)=\Lambda$,下面说明 Λ 是一个排斥子.

若 $x<0$, $f(x)=\frac{3}{2}(1+2x-1)=3x$,当 $k\to\infty$时,$f^k(x)=3^kx\to-\infty$. 若 $x>1$,则 $f(x)=\frac{3}{2}(1-2x+1)=3(1-x)$. 当 $k\to\infty$时, $f^k(x)=3^k(1-x)\to-\infty$.

若 $x\in[0,1]\setminus\Lambda$,存在 k,使得 $x\overline{\in}\bigcup\{S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}([0,1])\mid i_j=1,2,j=1,\cdots,k\}$,则 $f^k(x)\overline{\in}[0,1]$. 当 $k\to\infty$时,$f^k(x)\to-\infty$. 即 Λ 外的一切点经迭代后都趋于$-\infty$,因此 Λ 是一个排斥子.

下面说明 Λ 是一个分形排斥子,即分析 f 在 Λ 上的混沌性质.

已知Λ是三分康托集，记

$$\Lambda=\{x_{i_1i_2\cdots}\mid i_j=1,2,\quad j=1,2,\cdots\}$$

$x_{i_1\cdots i_k}$表示从[0,1]作第k次三分后的子区间中的点，若$i_1=i_1',\cdots,i_k=i_k'$，则

$$|x_{i_1i_2\cdots i_k}-x_{i_1'i_k'\cdots}|\leqslant 1/3^k$$

因为$x_{i_1i_2\cdots}=S_{i_1}(x_{i_2i_3\cdots})$，所以$f(x_{i_1i_2\cdots})=x_{i_2i_3\cdots}$. 设$(n_1,n_2,\cdots)$是一无穷序列，且由0,1构成的任何有限序列都在这个序列中作为一个连续块出现，比如

$$(0,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1,\cdots)$$

这里0和1的排列正好代表着数列的形式. 那么，对Λ中的任何$x_{i_1'i_2'\cdots}$和任何整数q，都可以找到k，使得$(i_1,i_2',\cdots,i_q')=(i_{k+1},\cdots,i_{k+q})$. 所以对适当大的k，$f^k(x_{i_1i_2\cdots})=x_{i_{k+1}i_{k+2}\cdots}$就能任意接近$\Lambda$中的每一点，即f在$\Lambda$中有稠的轨道. 又因为$x_{i_1\cdots i_ki_1\cdots i_ki_1\cdots}$是周期为k的周期点，所以f的周期点也在$\Lambda$中稠. 因为$f^k(x_{i_1i_2\cdots i_k1\cdots})\in[0,1/3]$，但$f^k(x_{i_1i_2\cdots i_k2}\cdots)\in[\frac{2}{3},1]$，所以迭代对初始条件有敏感的依赖性. 综上述$\Lambda$为f的混沌排斥子.

类似的方法可以证明，其它迭代函数系统的不变集也与函数的斥子完全相同. 若$S_1,\cdots,S_m$在定义域D上都是压缩的一一映射，它们的不变集为Λ且$S_1(\Lambda),\cdots,S_m(\Lambda)$互不相交，则对于当x在$S_i(\Lambda)$附近时使得$f(x)=S_i^{-1}(x)$的任一映射f，$\Lambda$就是f的一个斥子，再验证f对点$x_{i_1i_2\cdots}$的作用就可证明f在$\Lambda$上的混沌性质.

§7 朱力亚集

本节介绍复平面上解析映射的迭代产生的动力系统. 动力系统中的分形集，一大类来自解析映射$f:z\to f(z)$的迭代. 它所显示

出的性质惊人地复杂而且形姿漂亮.

设 $P(z)$ 是一多项式,求 $P(z)$ 的根的牛顿法就是有理映射 $N_P(z)=[zP'(z)-P(z)]/P'(z)$ 的迭代

$$z_{n+1}=z_n-P(z_n)/P'(z_n) \tag{5.129}$$

对于有些初始点,上述迭代收敛于多项式的一个根;然而对有些初始点 z_0,迭代不收敛,甚至还将出现混沌性.即迭代结果要么是可预测的,要么是混沌的.本节将讨论与此有关的解析动力系统中的混沌与分形.

一.关于有理映射的一些基本概念

复平面上一个有理映射 $R(z)$ 可表成

$$R(z)=P(z)/Q(z) \tag{5.130}$$

P 和 Q 为复多项式且没有公因子,$R(z)$ 的这种表达式除去一个非零常数因子外是唯一的.

$$\deg(R)=\max\{P\text{ 的次数},Q\text{ 的次数}\}$$

称作 $R(z)$ 的度,是一个最基本的不变量,它表示 R 对任一个 z 值的不同原像个数的最大值.事实上,除有限个值外,其余每一个值的不同原像个数都达到这一最大值.

除去有限个点外,在其它点上,R 是一局部同胚.使 R 不成为同胚的点称为临界点,临界点的像称为临界值.

在临界点的邻域内,R 是它的像的一个 k 对 1 的分支复盖,$k\leqslant\deg(R)$.一点不是临界点当且仅当此点互不相同原像的个数达到 $\deg(R)$.临界值的互不相同原像的个数则小于 $\deg(R)$.人们已经准确地计算出 $\deg(R)=n$ 的有理映射具有 $2n-2$ 个临界点.

像实动力系统一样,点 z 的向前迭代序列 $\{z,R(z),R^2(z),\cdots\}$ 称为 z 的轨道.所有临界点的轨道的集合的闭包称作后临界集.在分析解析动力系统时这一概念起着决定性的作用.

单复变理论在复解析映射的迭代中扮演着一定角色,下面给

出这一理论的几个重要结果. 令

$$\triangle=\{z \mid |z|<1\} \tag{5.131}$$

Schwarz 得到如下结果：设 $f:\triangle\to\triangle$ 是解析映射，且 $f(0)=0$，则 $\forall z\in\triangle$，有 $|f(z)|\leqslant|z|$ 和 $|f'(0)|\leqslant 1$ 且不论哪一个等号成立，都有 $f=\lambda z, |\lambda|=1$.

单位圆盘上通常载荷着常曲率为 -1 的唯一黎曼度量，通常称作 Poincaré 度量，其密度函数为

$$\rho_{\triangle}(z)=2/(1-|z|^2) \tag{5.132}$$

若将无穷远点包含于复平面 C 中，则得到黎曼曲面 $\hat{C}$. 如实函数一样，一致收敛的解析函数序列的一致极限是一解析函数. 若定义于 D 上的一族解析函数 $\{f_\alpha\}$ 的每一个无限子集都含有一个在 D 的每一紧子集上一致收敛的子序列，则称它是一正规族.

例 5.11 令 $R(z)=z^2, \{f_\alpha\}=\{R^0, R^1, R^2, \cdots\}$，则在 $\triangle$ 的任一紧子集上 R^n 一致趋于常值函数 0(解析)，但 $0\overline{\in}\{f_\alpha\}$.

连续函数族 $\{f_\alpha\}$ 称作同等连续的，若 $\forall \varepsilon>0, \exists\, \delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|z-\omega|<\delta$ 时，$|f_\alpha(z)-f_\alpha(\omega)|<\varepsilon$.

Arzela 等和 Montel 分别证明了正规族的两个重要特征.

i) 函数族 $\{f_\alpha\}$ 在 D 上正规当且仅当它在 D 上同等连续.

ii) D 上的解析函数族 $\mathscr{F}=\{f_\alpha \mid \alpha\in A\}$，若并集 $\bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha(D)$ 不取黎曼曲面 $\hat{C}$ 上三点，则 $\mathscr{F}$ 是一正规族.

二. 解析动力系统的有关结果

为了更好地理解 Julia 集，这部分介绍有理映照的迭代产生的动力系统的有关理论. 这一理论相当丰富，但限于篇幅，只能概括性地介绍. 有兴趣的读者可从有关文献中追索细节.

对于一般的有理映照 R，R 的一个 n 周期点 z_0 的轨道称为周期为 n 的周期缩环. 定义周期循环的特征值 ρ 为 R^n 在点 z_i 的导数. 根据链规则

$$\rho=(R^n)'(z_0)=\prod_{j=0}^{n-1}R'(z_j) \tag{5.134}$$

$$z_j=R(z_{j-1})$$

称周期点或周期循环为

(Ⅰ)吸性的　若 $0\leqslant|\rho|<1$，特别当 $\rho=0$ 时，称为超吸性的.

(Ⅱ)中性的　若 $|\rho|=1$

(Ⅲ)斥性的　若 $|\rho|>1$

值得注意的是当且仅当临界点属于周期循环时，周期循环才是超吸性的.

具有特征值 ρ 的 R^n 的周期点 z_0 的 Taylor 级数开始二项为

$$R^n(z_0+u)=z_0+\rho u+\cdots \tag{5.135}$$

因此，若 $|\rho|<1$ 且 u 充分靠近 z_0，则迭代 $R^n(z_0+u)$ 就更接近 z_0，而 $R^{2n}(z_0+u)$ 更进一步接近 z_0，…等等. 这就解释了为什么周期循环称为吸性的. 若 $|\rho|>1$ 且 u 充分接近 z_0，而迭代 $R^n(z_0+u)$ 将远离 z_0，这就是斥性周期循环名称的由来.

例 5.12　二次映射 $R_c: C\to C$ (5.136)

$$R_c(z)=z^2+c, c\in c \tag{5.136}$$

的不动点是方程 $z^2+c=z$ 的解

$$z_{1,2}=(1+\sqrt{1-4c})/2 \tag{5.137}$$

其特征值

$$\rho=1+\sqrt{1-4c} \tag{5.138}$$

当 $c\neq1/4$ 时，R_c 有两个不动点，记作 α_c 和 β_c. 其中 β_c 在有意义时代表斥性最大的不动点.

R_c 的周期为 2 的周期点是方程 $(z^2+c)^2+c=z$ 的异于不动点的解

$$z=(-1\pm\sqrt{-3-4c})/2$$

其特征值

(5)一个 $S\times U$ 到 G 的输出映射 g.

通常记为 $M=\langle U,G,S,f,g\rangle$，而 f,g 可表为

$$s(i+1)=f(s(i),u(i)),$$
$$g(i)=g(s(i),u(i)),i=0,1,2,\cdots$$

这里 $u(i)\in U,g(i)\in G$，和 $s(i)\in S$ 分别为第 i 时刻 M 的输入、输出及状态；$s(i+1)\in S$ 表示 $i+1$ 时刻的状态，即后继状态. $s(0)$称为初始状态. 这种有限状态机称为 Mealy 模型机[52]. 如果有限状态机的后续状态映射 $s(i+1)$及输出映射 $g(i)$是状态 $s(i)$及输入 $u(i)$的线性函数，则 M 称为线性有限状态机(简称线性机)，它可表示为：

$$s(i+1)=A\cdot s(i)+B\cdot u(i),$$
$$g(i)=C\cdot s(i)+D\cdot u(i),i=0,1,2,\cdots$$

这里，$s(i)$与 $s(i+1)$是 m 维状态列向量，$u(i)$是 n 维输入列向量，$g(i)$是 k 维输出列向量，因而 A,B,C 及 D 分别是 $m\times m,m\times n,k\times m$ 及 $k\times n$ 阶系数矩阵. 线性机是有限状态机中最简单的一种，已经被研究得相当充分. 设 $u(i)(i=0,1,2,\cdots)$是输入序列，则线性机的后续状态与输出可由初始状态表出：

$$s(i+1)=A^{i+1}\cdot s(0)+\sum_{j=0}^{i}A^{j}\cdot B\cdot u(i-j),$$

$$g(i)=C\cdot A^{i}\cdot s(0)+\sum_{j=0}^{i-1}C\cdot A^{j-1}\cdot B\cdot u(i-j-1)+D\cdot u(i).$$

通常所说的反馈移位寄存器(FSR)，可以看成一类特殊的有限状态机. 例如 FSR 的一般形式如图 9－1 所示(见下页)，其中每个方块表示二进制存贮单元，$\lambda(x_0(i),x_1(i),\cdots,x_{m-1}(i))$称为反馈逻辑函数，它决定了 FSR 的性质. 令

定理 5.16(Schroeder)　一不动点是稳定的当且仅当在此点的邻域内存在一解析映照 φ 使 R 与一线性映照共轭.

综上可知,吸性和超吸性周期点是稳定的,而斥性周期点则是不稳定的.

设解析动力系统的稳定集为 Ω,易知,若 D_0 是 Ω 的一个最大连通分量,则 $R(D_0)$ 也是 Ω 的分量. 已知 D_0 必是下列两种类型之一:

(Ⅰ)D_0 的前向迭代不相交,这时 D_0 是游荡点集.

(Ⅱ)存在正整数 m、n 使得 $R^n(D_0)=R^m(D_0)$,这时 D_0 是滞后周期的.

关于滞后周期域在定性和定量方面的分类,始于 Fatou 和 Julia,而由 Siegel,Herman 和 Sullivan 等人完成. 80 年代初,Sullivan 利用 Teichmiiller 理论中的复杂技巧排除了第(Ⅰ)种情况的出现.

定理 5.17(Sullivan)　有理映照稳定集的每一个分量都是滞后周期的.

由上述定理,自然地把稳定集的分量按下述方法分为等价类:若 U 和 V 最终都落在同一周期循环内,就认为它们属于同一类并记为 $U\approx V$. 因而等价类的数目就等于周期循环的数目,过去人们只知道这个数是有界的,而且其上界可用映照的度表示. 最近 Shiskikura 给出了该数的准确上限.

定理 5.18(Shiskikura)　度为 d 的有理映照最多只能有 $2d-2$ 个周期稳定域的周期循环.

为描述稳定域的类型,引入下述概念:周期循环 Perb 的吸性盆是一个点集,该集中每一点的轨迹都趋向 Perb;Perb 的直接吸性盆指吸性盆中那些含有 Perb 的分量的集.

设 $z,w\in\bar{C}$,若存在整数 m、n 使得 $R^m(z)=R^n(w)$,则称 z 和

w 是大轨道等价，且记为 $z \sim w$.

若不考虑解析共轭，则周期循环的首个返回映照共有以下五种类型.

(1) 吸性循环

命题 5.6 周期循环的直接吸性盆至少含有一个临界点.

由此和定理 5.18 知，最多只能有 $2d-2$ 个吸性(或超吸性)周期循环.

(2) 超吸性循环. 在超吸性周期点的吸性盆内，存在着一种在动态系统意义下定义的多叶性结构. 这一多叶性结构在 R 的映照下不变.

(3) 抛物循环 抛物循环是某一周期点的直接吸性盆. 圣马科(Camacho)在他的"花朵定理"中对抛物周期点邻域内动力系统的性质作了描述. 简略地说，周期点的邻域被分成多个扇形，使直接吸性盆的每一分量落在一个扇形中. 不动点是这些分量中的点的吸引子.

命题 5.7 抛物周期循环的直接吸性盆含有一个临界点.

(4) Siegel 圆盘 Siegel 圆盘是 Ω 中满足如下条件的 D:

(i)D 含有一周期点，

(ii)使 D 不变的首个返回映照与单位圆盘的无理转动共轭.

这一共轭过程借助于△内圆周的逆像数确定了 D 的多叶性结构，与超吸性情况一样. 但是，在 Siegel 圆盘内，每一叶都被首个返回映照一一地映到它自身上去. Siegel 给出了这一共轭过程存在的充分条件.

若存在 $c>0$ 和 $\nu>0$ 使得对每一个有理数 p/q 有

$$|a-p/q|>c/q^{\nu}$$

则称 a 是一丢番图值.

定理 5.19(Siegel) 使一周期循环的首个返回映照与某一无

理转动共轭的充分条件是在循环上各点，特征值具有如下形式

$$\rho=\exp(2\pi ia),a \text{ 是一丢番图值} \tag{5.140}$$

Cremer 发现存在着一些使这种共轭性并不存在的例子. 这是一些中性周期循环的例子. 对这些循环，特征值也有(5.140)的形式，但 a 并非丢番图值而为一无理数. 这些例子的选取是使得循环的任一邻域都含有周期点.

Fatou 和 Julia 还证明了下述事实：含有一中性周期循环的稳定周期分量的边界落在后临界集的凝聚集内.

(5) Herman 圆环　Herman 圆环是 Ω 中与环域拓扑等价的一个分量，且在此分量上，首个返回映照与某一正则环域的一个无理转动解析共轭. 正则环域中圆周的逆像构成了 Herman 圆环的一个多叶结构且不含周期点.

Herman 圆环的例子是 M · Herman 在研究函数族

$$f(z)=e^{ia}(z-\alpha)/z(1-\bar{a}z) \tag{5.141}$$

时发现的. 族中的 a 是丢番图值而 α 是正确选取的一个值.

综上所述得

定理 5.20　Ω 的每一滞后周期分量最终必落入吸性域、超吸性域、抛物域，Siegel 圆盘和 Herman 圆环五类区域之一.

三. 朱力亚(Julia)集

设 $z\in C$，U 是包含 z 的开邻域. $f:C\to C$ 是解析映照，则集合

$$F(f)=\{z|z\in C \text{ 使}\{f^n|_U:n\in N\}\text{是正规族}\} \tag{5.142}$$

$$J(f)=C\backslash F(f) \tag{5.143}$$

分别称作 f 的 Fatou 集和 Julia 集. 集 F(f)中的点 z 称为 f 的稳定点.

由定义知 F(f)是 f 的稳定集. 当 f 为有理函数时，F(f)就是前面提到的 Ω，而 J(f)则是 f 的不稳定集. 它们将复平面分成两个部分.

由定义还可见，$F(f)$是开集，因此$F(f)$或是空的或在$\hat{C}$上稠密，两者必居其一，$F(f)$通常是不连通的. 而$J(f)$则是一闭集. 容易证明$F(f)$的下述性质

命题 5.8 若$z\in F(f)$，则$f(z)\in F(f)$且$f^{-1}(z)\in F(f)$.

例 5.13 若$R(z)=z^2$，则整个△的内部都是R的稳定点，而$\hat{C}\backslash\triangle$中所有点的迭代均趋于∞，因而$\hat{C}\backslash\triangle$也全是稳定点. 边界$|z|=1$上的点，情况则不一样. 这一圆周本身完全不变，但圆周上一点的任一邻域U在R的映射下将得到扩展，U的所有迭代的并集$\bigcup\limits_n R^n(U)$将复盖$\hat{C}\backslash\{0,\infty\}$的所有点，因此$|z|=1$是R的Julia集，即$J(R)=\{z\,|\,|z|=1\}$.

$J(R)$可以是整个复平面，如 $R(z)=(z^2+1)^2/az(z^2-1)$的Julia集$J(R)=C$，$J(R)$还可以是黎曼球面，如 $R(z)=(z-2)^2/z^2$，$J(R)=\hat{C}$.

有理函数R的Julia集具有以下性质

Ⅰ)$J(R)$是R的非空完全不变集，即$R^{-1}(J)=J=R(J)$且是极小的，即不真正含有任何闭的完全不变集.

Ⅱ)除$J(R)=C$外，$\mathrm{Int}J(R)=\varnothing$，Int表示内部算子.

Ⅲ)$J(R)$是完全集.

Ⅳ)$\forall\ z\in J(R)$，$\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant 0} R^{-n}(z)}=J(R)$ (5.146)

Ⅴ)若$J(R)$含有$\hat{C}$的非空开子集，则$J(R)=\hat{C}$

Ⅵ)Julia集是所有斥性周期点的闭包.

Ⅶ)若D是与$J(R)$相交的区域，则存在正整数k，使R^k将$D\cap J(R)$映照到$J(R)$上.

另外我们还知道，抛物循环中的点均属于$J(R)$，根据定理5.20可推得

Ⅷ)若每一临界点是预周期的，且再没有周期的临界点，则$J(R)=\hat{C}$.

以后我们将重点介绍Julia集的分形性质.

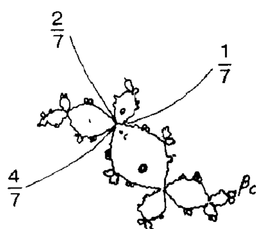
J(R)的性质Ⅳ说明,z是一不稳定点,w是邻近于z的另一不稳定点,那么即使我们知道z的轨道,我们也完全无法知道任何有关w的轨道的信息,即是说,限制于J上的动力系统对初始参数的依赖性是很灵敏的,它正表明了在很多情形下J(R)具有的分形与混沌性质.直观地,这一性质说明,若$z\in J(R)$,则z的逆像$R^{-n}(z)$将向J(R)凝聚,这一性质经常地被用于绘制能近似二次多项式的Julia集的计算机图像.

有理映射R的Julia集除C和$\hat{C}$外,可以分成三类,它们是光滑的或分形Jordan曲线,或完全不连通集.结合性质(Ⅲ)和拓扑学知识知,后一情形的J(R)是一个康托型集,这时R|J的动力系统相当于符号动力系统.对J(R)的性质起决定作用的是临界点的轨道和无穷远点的稳定集.三类Julia集共存于下述著名映射——Douady兔子之中.

例5.14 二次映射f_c:C→C定义为

$$f_c(z)=z^2+c \qquad c\in C \tag{5.147}$$

称作Douady兔子.随着参者c的变化,$J(f_c)$变幻万端,呈现出极其美妙的图像.当c=0时,由前例可知,$J(f_0)$是单位圆周$|z|=1$;c在c=0附近取值时,$J(f_c)$是Hausdorff维数大于1的分形拟圆周;c的实部或虚部充分大时,$J(f_c)$是类康托分形集.当c满足$c^3+2c^2+c+1=0$,$Im(c)>0$时,$J(f_c)$称作Douady兔子.它是连通的,而Fatou集则由无限多个单连通区域组成.取$c=-0.1226+0.7449i$时计算机绘制的$J(f_c)$如图5.11所示,其图形象一只兔,故称作Douday兔子.取$c=-3/4$,$J(f_c)$是一条Hausdorff维数大于1的分形Jordan曲线,如图5.12.



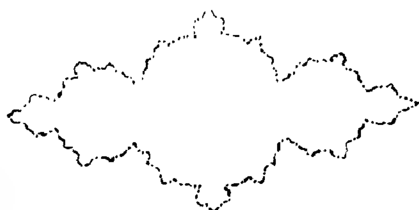


图 5.11 Douady 兔子　　　　图 5.12 Camacho 吸引子

这一曲线称作圣马科吸引子，它是一分形拟圆周. 拟圆周指单位圆周的拟共形同胚象. 当 c＝0.3 时，$J(f_c)$即为完全不连通的康托型分形集. 图 5.13 中，后一图形是前一图形的局部放大，由此可以观察到 Julia 集的某种自相似性.

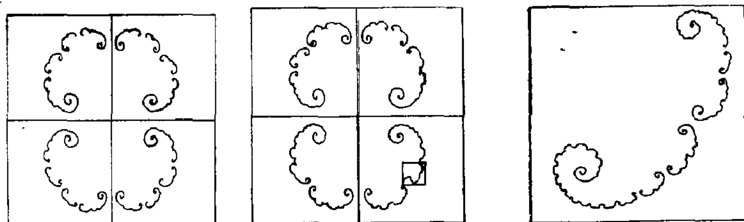


图 5.13 $f_c(z)=z^2+3$ 的 Julia 集的分形特征

为了刻画 Julia 集呈现出的相似性，引入下述概念：

度量空间(X,d)到自身的一个映射 f 称作 k—拟等距(简称为拟等距)的，如果∀ x,y∈X，有

$$\frac{1}{k}d(x,y)\leqslant d(f(x),f(y))\leqslant kd(x,y) \tag{5.148}$$

令 $\varphi_r(x)=x/r$ 表示变量 x 的一个 1/r 伸缩，$B(x_0,r)$表示中心在 x_0，半径为 r 的圆盘，集 S 称作 k—拟自相似(或简称为拟自相似)的，如果存在一个 k 和 r_0 使得对 S⊂X 及∀ x∈S 和所有的 $r<r_0$，$\varphi_r(S\cap B(x,r))$可以被一个 k—拟等距映射于 S 上.

J(R)的性质(Ⅷ)说明 Julia 集的某一小块最终会被某一迭代映射于整个 Julia 集上. 这是自相似集所具有的一个性质. 但事实表明,Julia 集极少是自相似的,实际上它具有比自相似性稍弱一些的拟自相似性.

图 5.11 中 Douady 兔子的填充 Julia 集为超吸性循环,以 0 为其超吸性周期点,0 为直接吸性盆,含有三个不同的分支. 将其局部放大可以观察到其拟自相似性,如图 5.14 所示.

若 R 的 Julia 集与它的临界点的向前轨道的闭包不交,则称 R 是扩展有理映照,Sullivan 证明了下述著名定理



图 5.14 a)Douady 兔子的填充 Julia 集

b)为 a)中方框内部分的放大

定理 5.21(Sullivan) 扩展有理映照的 Julia 集是 k—拟自相似的,k 是某一实数.

圣马科吸引子的填充 Julia 集(图 5.15)为一抛物循环,其拟自相似性是显见的. 令

$$R(z)=z^2-cz,$$

其中 $c=0.7373688+i0.6754903$



图 5.15 圣马科吸引子的填充 Julia 集

其填充 Julia 集为 Siegel 圆循环(图 5.16). 在(5.14)中令 $c=i$,其

Julia 集为无圈曲线，如图 5.17 所示，它们都呈现出拟自相似性.

现在进一步分析 $f_c(z)=z^2+3$ 的 Julia 集(图 5.13). 其临界点是 $z=3$，临界点的轨道是 $3\to12\to147\to\cdots$，趋向于超吸性不动点 ∞. f_c 是扩展映照，因而它的 Fatou 集是 ∞ 的直接吸性盆，此吸性盆含有趋向 ∞ 的点. 而 $J(f_c)$ 则是所有不趋向 ∞ 的点的集合. 为了解它的分形结构，令 $\Gamma=\{z\mid|z|=2.5\}$，



图 5.16 Sigel 圆循环

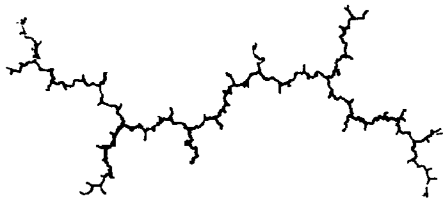


图 5.17 z^2+i 的 Julia 集

则 Γ 外部任何点的轨道均趋向 ∞，Γ 内部包含有它自身的两条原像曲线 Γ_0 和 Γ_1，它们互不相交且都不含临界点 0(见图 5.18)，由 Γ,Γ_0,Γ_1 这三条曲线围成的区域在迭代下被映照到 Γ 的外部，因而此区域内所有点的轨道都趋向 ∞. 取 Γ 的前像的原像并继续这一过程，设这些前像为 $\Gamma_{00},\Gamma_{01},\Gamma_{10},\Gamma_{11},\cdots$ 等等，则 $J(f_c)$ 是这些原像交集中的一个 Cantor 集，$F(f_c)$ 则是这一 Cantor 集的补集. 它是一无穷连通集.

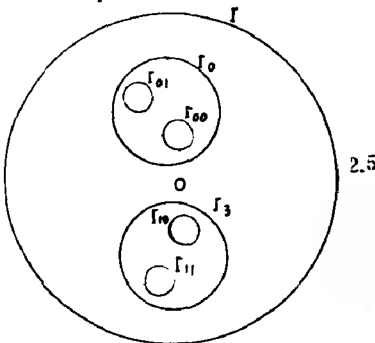


图 5.18 z^2+3 的 Julia 集的 Cantor 型结构分析

实际上，若 R 是多项式，则 F(R)的所有有界分支都是单连通的，但对有理映照却未必然. 例如对 Fatou 集含有 Herman 圆环的有理映照，这一结论就不成立.

在本节一开始，我们提到求多项式根的牛顿迭代法. 这一迭代算法与 Julia 集有着密切关系.

一个纯迭代算法，即一个有理映射

$$T: P\times C\to C$$

其中 P 是 C 上所有多项式的集合. 对牛顿算法，即

$$T_f(z)=z-f(z)/f'(z)$$

人们知道，T_f 的 Fatou 集中的点经 T_f 的迭代将收敛于 f 的根(零点)z_0，而 $J(T_f)$恰是在 T_f 的迭代下不收敛到 f 的零点的集合.

四. Julia 集的维数

在本节第一部分中已给出了有理映照 R 的临界点的直观概念，实际上，$c\in C$ 是 R 的临界点等价于 $R'(c)=0$. 记 R 的临界点集为 $k(R)$，R 的所有有限临界点的集合记为 $k'(R)$.

用记号 $A(z)$表示含点 z 且使 $R^n(n\geqslant1)$限制于其上为正规族的最大域，$A(z)$称为 z 的直接稳定集. $0^+(z)$表示 z 的正向轨道$\{R^n(z)|n\geqslant1\}$. $\forall z\in C, z\notin A(\infty)$相当于 $0^+(z)$包含于一个有界集中. 这样有下述定理

定理 5.22 (Ⅰ)对 C 上的多项式 P，$k'(p)\cap A(\infty)=\varnothing$当且仅当 $J(p)$的轨道连通；

(Ⅱ)若 $k'(p)\subset A(\infty)$，则 $J(p)$完全不连通且 $P|J$ 同构于 d 个符号的单边移位. 这里 $d=\deg(P)$.

这定理说明，每一个二次多项式 P 的 J(p)或者连通或者完全不连通. 利用拓扑共轭可将二次映射变为标准形式

$$P_\lambda(z)=\lambda z+z^2 \quad 或者 \quad P(z)=z^2-\mu.$$

下述关于 $J(P_\lambda)$维数的定理说明某些情形下的 Julia 集是分形

集.

定理 5.23 对 $0<|\lambda|<1$，$1<\dim(J(P_\lambda))<2$，且 $J(P_\lambda)$ 是一拟圆周.

以下讨论有理映射 $R_c(z)=z^Q+c$，$q\in Z$，$c\in C$ 的 Julia 集 $J(R_c)$ 的 Hausdorff 维数的求法. 在 $q=2$，$c\in R$ 且 $c\approx 0$ 时，有

$$\dim J(R_c)=1+a_2c^2+\cdots$$

当 c 较小和较大时，Widom 等运用扰动理论求出了 $R_c(z)$ 的 Hausdorff 维数，提出了一种数值方法.

$c=0$ 时，映射 $R_0(z)=z^n$ 的 Julia 集是单位圆周，设 c 充分小使 $R_c(z)=z^Q+c$ 的 Julia 集与圆周同胚，则可将 Julia 集参数化

$$z(t)=e^{2\pi t}(1+cU_1(t)+c^2U_2(t)+\cdots),U_m(t)=U_m(t+1)$$

因为 Julia 集是 R_c 下的不变集，故 $z(t)$ 应满足

$$R_c(z(t))=z(Qt)$$

将 $z(t)$ 代入上述方程并比较展开后 c 的各阶系数得下列函数方程

$$U_1(Qt)-QU_1(t)=e^{-2\pi i Qt},$$

$$U_2(Qt)-QU_2(t)=\frac{1}{2}Q(Q-1)U_1^2(t),$$

$$\cdots\cdots$$

$$U_m(Qt)-QU_m(t)=\sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=0}^{m}\binom{m}{i_j}U_{i_1}(t)U_{i_2}(t)\cdots U_{i_j}(t),$$

$$\cdots\cdots$$

$$U_0(t)=1$$

由以上方程可以依次求出函数 $U_1(t)$，$U_2(t)$，…，$U_m(t)$，….如令

$$\varphi(t)=-\frac{1}{Q}\sum_{l=0}^{\infty}Q^{-l}e^{2\pi i Q^l t}$$

则 $U_1(t)=\varphi(Qt)$,

$$U_2(t)=\frac{1}{2}Q(Q-1) \sum_{l_1 l_2=1}^{\infty} Q^{-(l_1+l_2)}\varphi[(Q^{l_1}+Q^{l_2})t]$$

利用 z(t)的表达式可计算出 Julia 集的 Hausdorff 维数,它主要依据下述定理

定理 5.24(Ruelle) 设 D_0 是 J(R)的 Hausdorff 维数,则级数

$$\xi(u)=\exp\sum_{n=1}^{\infty}A_n(D_0)u_n/n$$

收敛于一个亚纯函数,u=1 是其简单极点,而且单位圆盘内 $\xi(u)$ 没有其它极点和零点. 式中

$$A_n(D)=\sum_{x\in \mathrm{Fix}R^n}|dR^n/dz|^{-D}$$

由 Ruelle 定理立即得到 $D_0=\dim J(R)$的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}A_n(D_0)=1$$

如果我们能够求出 $A_n(D)$的表达式,这一公式可十分方便地用于计算 dimJ(R). 另外,$\mathrm{Fix}R^n$ 可以根据关系 R(z(t))=z(Qt)写为

$$\mathrm{Fix}R^n=\{z(t_j)\,|\,t_j=j/(Q^n-1),j=0,1,\cdots,Q^n-2\}$$

于是

$$\left.\frac{dR^n}{dz}\right|_{z=z(t_j)}=\prod_{m=0}^{n-1}R'(z(Q^m t_j))=Q^n[\prod_{m=0}^{n-1}z(Q^m t_j)]^{Q-1}$$

$$A_n(D)=Q^{-nD}(Q^n-1)<\prod_{m=0}^{n-1}|z(Q^m t_j)|^{-(Q-1)D}>_n$$

这里记号$<\ \ >_n$ 表示

$$<a(t)>_n=\prod_{j=0}^{Q^n-2}a(t_j)/(Q^n-1)$$

把 z(t)的表达式代入前面的 $A_n(D)$可以得到 c 的幂级数

$$A_n(D)=Q^{-nD}(Q^n-1)\{1+c\bar{c}D^2n/4+\delta Q^2(c^2\bar{c}+\bar{c}^2c)$$

$$\times[(\frac{D^2}{4})\frac{n}{2^n-1}+(\frac{D^3}{16}+\frac{D^2}{8})n]+O(C^4n^2)\}$$

将此式代入 $\lim_{n\to\infty}A_n(D_0)=1$ 得到

$$D_0=1+c\bar{c}^4/4\ln Q+3\delta_{Q,2}(c^2\bar{c}+\bar{c}^2c)/16\ln Q$$

对于较大的 c，$R_c(z)=z^Q+c$ 的 Julia 集 $J(R_c)$ 集结于 R_c 的 Q 个不稳定不动点 $z\approx(-c)^{1/Q}$ 附近，可以得到估计

$$A_n(D)\sim Q^{n(1-D)}|c|^{-nD/Q}$$

所以有

$$D_0=Q\ln Q/\ln|c|$$

五. 整函数的 Julia 集

早在 1926 年，Fatou 就展开了复平面上整函数迭代的研究，但直到 1980 年 Misiunewicz 证明了指数函数 e^z 的 Julia 集是整个复平面 C，并成功地解决 Fotou 提出的问题，才又激起研究者们的兴趣. 现在已有很多重要发现，特别是超越整函数的 Julia 集与多项式或有理映射的 Julia 集的不同性质. Devaney－Tanqerman 定理就是一个显著的代表.

定理 5.25 设 f 是临界有限的超越函数，并且具有一个有一渐近方向和双曲性的指数片 D，则 Julia 集

$$J(f)=\overline{\{z|f^n(z)\to\infty\}}$$

由定理立即可见整函数的 Julia 集与多项式情形的区别，前面我们已经知道，对多项式 R(z)，迭代下趋于∞的点一定不在 J(R) 中.

一整超越函数 f 称为临界有限的，如果它只有有限多个临界值和渐近值. 设这些临界值和渐近值（有限的）含于开圆盘D，$\Gamma=C\backslash D$.

Devaney 等证明，$f^{-1}(\Gamma)$ 的每一分支是含有∞的闭圆盘，而且 $f:T\to\Gamma$ 是一个通用复盖. 每个分支称为一个指数片.

指数函数 e^z，三角函数 sinz，cosz 都满足定理的条件. Devaney 研究了指数函数 $f(z)=\lambda e^z$ 的 Julia 集的几何结构，有

定理 5.26(Devaney)

Ⅰ)若 $\lambda>1/e$，则 $J(f)=C$.

Ⅱ)若 $0<\lambda<1/e$，则 $J(f)$是曲线的 Cantor 集，位于竖直线 $x=p$ 的右半平面，P 是 f 的较大不动点.

曲线的 Cantor 集如图 5.19 所示，它可以看成一Cantor 集与闭半线$[0,\infty)$的笛卡尔积，称作 Cantor 束. 这是因为其中所有曲线沿着同一方向趋于∞. 下述定理说明了整超越函数 Julia 集的分形性质.

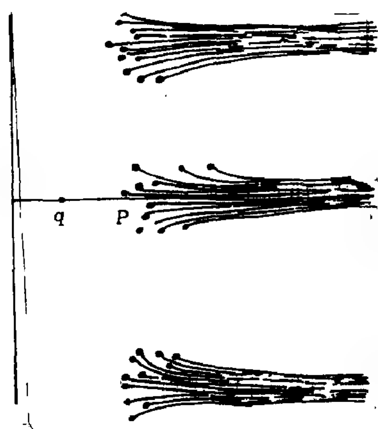


图 5.19 Cantor 束

定理 5.27(Devaney) 设 f 是临界有限的整超越函数，具有指数片 T 和 $f|T$ 的渐近方向 θ^*，则 $J(f)$的子集 $J_T(f)$包含一个 Cantor 束.

这里指数片 T 是 $f^{-1}(\Gamma)$ 的任一分支，而$J_T(f)=\{z\in J(f)|f^n(z)\in T,\forall n\in N\}$是 $J(f)$的闭不变子集.

有关解析映照迭代的研究可追溯到 A·Cayley，他在上世纪末就致力于复的牛顿迭代法的研究. 迟至本世纪 20 年代，P·Fatou 和他的激烈竞争对手 G·Julia 双双展开了复多项式和有理函数迭代的研究. 虽然他俩表现出特别显著的智力成就，但是由于迭代运算和代数运算迥然不同，他们在处理这一问题时还没有计算机，不得不完全依赖他们自身固有的想象力，研究工作艰难曲折. 在随后的 50 年间，这方面的研究没有得到什么进展. 随着计算机的出现和普及，人们可以凭借计算机进行数值实验，这一研究课题

才又获得生机.特别值得指出的是,1980年,B·B·Mandelbrot用计算机绘制出了现在用他名字命名的Mandelbort集的第一张图来,激起了人们极大的兴奋与兴趣.什么是Mandelbrot集呢?请读下节.

§8 Mandelbrot集

本节我们将注意力集中于二次多项式 $f_c(z)=z^2+c$ 的动力系统.这是因为对大多数复动力系统而言,在参数空间内没有什么明显的图形可作,原因在于人们根本就提不出什么可以作图的问题.而对二次多项式的动力系统,则能在参数空间成功地画出图形来.这主要是因为我们可以提出诸如"在迭代下,临界点会出现什么情况?"等问题.Mandelbrot集正好回答了这一问题.

从上节知,多项式 $f_c(z)$ 只有一个临界点 $z=0$,c是其临界值.欲了解所有二次多项式的迭代问题,只须了解单参数族 $\{f_c\}c\in C$ 就够了.

变量z和c均填满整个复平面,对某一固定参数c,称z—平面为动态平面;称c—平面为参数平面.在上节中,我们讨论的 $J(f_c)$ 和 $F(f_c)$ 都是动态平面上的图形.且对 $\forall\ c\in C$,动态平面上都有与之对应的 $J(f_c)$ 和 $F(f_c)$.本节研究的M-集则是参数平面上的图形.

一.M—集概述

复平面C上当 $n\to\infty$ 时,序列 $c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \cdots$ 不趋向∞的c的集合M称为Mandelbrot集,简称M—集.即

$$M=\{c\in C|c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \cdots \nrightarrow \infty\}$$

集M的形状如图5.20所示(见下页).

集 M 是极其复杂的. Mandelbrot 使用人们较就悉的语言对 M—集作了形象的描述：一个原子是复平面上的一个最大区域(开集)，其中任两个 c 值的 $J(f_c)$是同胚的. 原子中有一些是心形，而另一些是近于圆盘形的. M—集的原子有可数无限多个，核是原子中超吸性(超稳定)的 c 值，一分子由可数无限多个原子结合而成，其中仅有一个是心形而其余为近于圆盘形，分子中的每两个原子都由一个只与有限多个其它原子相交的连通线相连. M—集中的分子有无限多个，其中之一是大陆而其余皆为小岛，任何两个分子可用 M—集中的一些连通线路联结，这线路相交于无限多个其它的分子，沿着这线路不属于分子内部的点形成一康托集，而且任何

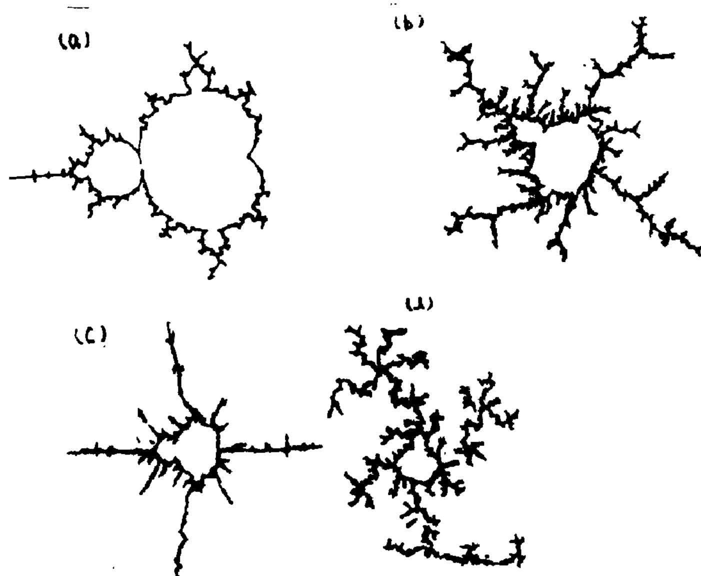


图 5.20 M—集的边界及其部分的放大

两个分子之间都有一个光滑同胚.

上面的描述说明了集 M 具有的分形性质. 从 M 的外形也可以观察到 M 的某种自相似性. 即 M 包含了与它自身相仿的小图形，这些小图形又包含与 M 相仿的更小图形，如此无限地包含下

去，但 M 的局部并不与整体严格自相似，将每一微型 M 集放大，都显示出各自的花样，与任何其它一个微型 M 不完全一样.

二. M—集与填充 Julia 集

M 集与填充 Julia 集有很多对应的性质，因此将它们放到一起讨论.

从上节知道，f_c 的动态平面可以分成两个互不相交的子集：在其上动态性质温驯的稳定集，即 Fatou 集 $F(f_c)$，和在其上动态性质混沌的 Julia 集 $J(f_c)$.

从另一角度，f_c 的动态平面又可划分成另外两个互不相交的子集：即轨道为有界的种子集

$$K_{f_c}=\{z\in C\,|\,f_c^n\nrightarrow\infty\}$$

和轨道为无界的种子集 $C\backslash K_{f_c}$，显然 K_{f_c} 包含所有的周期循环，由于 $\partial K_{f_c}=J(f_c)$，∂K_{f_c} 表示集 K_{f_c} 的边界. 因此 K_{f_c} 就是上节中提到的填充 Julia 集.

Fatou 定理说明，临界点的性态支配着系统的动态性质，而 Fatou 和 Julia 在 1918－1919 年间证明的下述定理进一步支持这一论断.

定理 5.28 设 Ω_R 是多项式 R 的临界点集，则

$J(R)$ 连通 $\Leftrightarrow\Omega_R\subset K_R$

$J(R)$ 是 Cantor 集 $\Leftrightarrow\Omega_R\cap K_R=\varnothing$

这里 K_R 表示 R 的填充 Julia 集. 从上节的分析知道，对二次多项式，它的 Julia 集和填充 Julia 集或者是连通的，或者是 Cantor 集.

二次多项式 $f_c(z)$ 的填充 Julia 集 K_{f_c} 是有限闭集，因而是紧的. 事实上，设 $r=\max\{2,|c|\}$，则对 $|z|>r$，下面的不等式成立

$$\frac{|f_c(z)|}{|z|}\geqslant|z|-\frac{|c|}{|z|}\geqslant|z|-1 \tag{5.149}$$

从而，若 $|z|>r$，则 $f_c^n(z)\to\infty$，即 K_{f_c} 完全包含在以原点为中

心，r 为半径的圆盘内.

由 K_{f_c}是连通的还是 Cantor 集这一动态性质很自然地确定了参数平面的一种分解. 由定理 5. 28，这种分解又可以用临界点 0 在 f_c 的迭代下轨道是否有界这一容易用计算机加以验证的性质表达. 这样，参数平面刚好被分解为 M—集

$$\begin{aligned} M &= \{c\in C \mid J(f_c)\text{连通}\} \\ &= \{c\in C \mid f_c^n(0)\nrightarrow\infty\} \\ &= \{c\in C \mid c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \cdots\nrightarrow\infty\} \end{aligned} \quad (5.150)$$

和它的余集 C\M.

利用(5. 149)知，若 $|c|>2$，则 $|f_c^2(0)|>|c|$ 且 $f_c^n(0)\to\infty$；若 $|c|\leqslant 2$ 且对某一 k，$|f_c^k(0)|>2$，则 $f_c^n(0)\to\infty$. 因此，若点 0 在 f_c 的迭代下的轨道总是落在以原点为中心，半径为 2 的闭圆盘外部，则 $c\notin M$. 另外可以断定 M—集完全含在以圆点为中心，2 为半径的闭圆盘内，即

$$M\subset\{c\in C \mid |c|\leqslant 2\}.$$

事实上，取 $c\in\mathscr{R}$，容易证明在 f_c 的迭代下，0 有一有界轨道的充要条件是 $c\in\left[-2,\frac{1}{4}\right]$，故

$$M\cap\mathscr{R}=\left[-2,\frac{1}{4}\right] \quad (5.151)$$

然而，我们应当注意，在动态平面和参数平面所提出的问题的差别. 在动态平面，固定一个参数值 c 然后研究所有种子 z 在 f 迭代下的轨道. 在参数平面，则固定种子 $z_0=0$，然后对所有参数研究种子 0 的轨道. $z_0=0$ 不是随便选取的，而是每一个 f_c 的唯一临界点.

把参数平面分解成 M 和它的余集看来似乎过于粗糙，因为从定义根本就不清楚为什么 C\∂M(∂M 表示 M 的边界)的分支确定了参数平面的一个详细分解，也不知道为什么 ∂M 就是分岐集，即

那些使动态性质发生质的变化的参数值的集.而对 M 集的性质的如此深刻的理解，应归功于 A·Douady，J·H·Hubbard 和 D·Sullivan 等在 80 年代的开拓性工作.

由 Fatou 定理易知，使 f_c 具有吸性周期循环的 c 值必属于 M，用 H(W)表示这些 c 值的集合.

$$H(M)=\{c\in C \mid f_c \text{有吸性周期循环}\}$$

例 5.15 容易确定集 M 的两个子集，其一是集 M 中使 f_c 存在吸性不动点的 c 值的集合，其二是使 f_c 有一周期为 2 的周期循环的 c 的集合. 记

$$W_0=\{c\in C \mid f_c \text{有一吸性不动点}\}$$

$$W_{\frac{1}{2}}=\{c\in C \mid f_c \text{有一周期为 2 的吸性周期循环}\}$$

二次多项式

$$Q_\lambda(z)=\lambda z(1-z)$$

在 z=0 处有一不动点，在该点 $Q_\lambda(z)$ 的特征值为 $Q_\lambda'(0)=\lambda$. 因为当且仅当 $|\lambda|<1$ 时，z=0 是 $Q_\lambda(Z)$ 的吸性不动点，通过一仿射变换可使 Q_λ 与 f_c 共轭且使 c 与 λ 有下述关系

$$c=\lambda/2-(\lambda/2)^2$$

因此知道 λ—平面上的单位圆周 $\lambda=e^{2\pi it}$ 对应于 c—平面上的一条心脏线，即图 5.20 中那条大的心脏线，双曲分支就是被这一心脏线所围成的集 M 的子集. 另外，对 $c\in W_0$，f_c 在吸性不动点 α_c（上节例 5）处的特征值定义了一个把 W_0 映照到单位圆内的映照

$$\rho_W: W_0\to D,\quad c\to 1-\sqrt{1-4c}$$

利用 $\rho=4(1+c)$ 立即发现 $W_{\frac{1}{2}}$ 是以 c=−1 为中心，$\frac{1}{4}$ 为半径的开圆. 对 $c\in W_{\frac{1}{2}}$，f_c 在周期为 2 的周期循环上的特征值，则定义一个 $W_{\frac{1}{2}}$ 到单位圆内的映照.

$$\rho_{W_{\frac{1}{2}}}: W_{\frac{1}{2}}\to D,\quad c\to 4(1+c)$$

这两个集的闭包有一公共点，即 $\overline{W}_0 \cap \overline{W}_{\frac{1}{2}} = \{-3/4\}$. 点 $c = -3/4$ 是使周期倍增的分歧点，这意味着当 c 从大心脏线的内部变到圆盘内部时，不动点 α_c 从吸性变成斥性，而周期为 2 的周期循环则由斥性变成吸性. 子集 W_0 和 $W_{\frac{1}{2}}$ 是双曲分支的两个例子.

应用隐函数定理知 H(M)是开集，而且对 H(M)的每一连通分支，可指定一个不变量即吸性周期循环的周期与之对应. H(M)的每一连通分支都称作 M 的双曲分支. 使 f_c 成为双曲的 c 值的集合为 $H(M) \cup \{(c \backslash M)\}$. 目前尚不知道 H(M)是否等于集 M 的内部，而有二次多项式的双曲性猜测.

$$H(M) = \mathrm{Int}(M)$$

在例 5.15 中，已求出双曲分支 W_0 和 $W_{\frac{1}{2}}$ 的特征值且这些特征值诱导一个从双曲分支到单位圆盘的共形同构. 这一结果对一般情形亦成立.

定理 5.29(Douady－Hubbard)　对 M 的每一双曲分支 W，特征值 ρ_W 诱导一个共形同构

$$\rho_W : W \to D.$$

由定理推知，对每一双曲分支存在唯一的一个值 c，在该点吸性循环是超吸性的. 该点称为 W 的中心. 例如 W_0 和 $W_{\frac{1}{2}}$ 的中心分别是 0 和 -1. 对于边界点 $\rho_W^{-1}(e^{2\pi i t})$，则说它具有内部变量 t. 内部变量为 0 的边界点称为 W 的根，例如 W_0 和 $W_{\frac{1}{2}}$ 的根分别为 $\frac{1}{4}$ 和 $-\frac{3}{4}$.

为了进一步了解 M 集的拓扑性质，我们从动力系统的角度引入格林函数和 φ_c 映照. 它们是了解 f_c 的迭代产生的动力系统的主要工具.

对复平面上任一紧集K，都可定义K的余集上的格林函数 $G(K): C \backslash K \to \mathscr{R}$，它是一个调和函数. 要求 G 在 $z = \infty$ 有一个对数

极点，且当 z 趋于 K 时 $G(z)$ 趋于零，从而使 G 标准化. 根据这些性质可唯一地确定 $G(K)$. 但对一般紧集，G 很难用显式定义. 使人感到惊奇的是：当 K 是一多项式的填充 Julia 集或 M 集时，很容易用显式定义 G.

对填充 J 集 $K(f_c)$ 定义格林函数 $G_c: C\backslash K(f_c)\to\mathscr{R}$ 如下

$$G_c(z)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}|f_c^n(z)|$$

可以证明

i) G_c 是调和的

ii) $G_c(f_c(z))=2G_c(z)$

iii) $G_c(z)=\log|z|+O(1)$，　当 $|z|\to\infty$

iv) 当 $d(z,K(f_c))\to 0$ 时，　$G_c(z)\to 0$

因此 G_c 是一标准化格林函数，它量度了 z 的轨道跑向 ∞ 的速率. 规定 $G_c(K(f_c))=0$，则 G_c 可扩充成 C 上的连续映照.

规定 $f_c(\infty)=\infty$，则 f_c 扩充到黎曼曲面 $\hat{C}$ 上. 由上节知 ∞ 是 f_c 的一个超吸性不动点，故存在 ∞ 的邻域 (c,∞) 上的一个全纯同构 φ_c，使 f_c 与 $f_0(z)=z^2$ 共轭，即

$$\varphi_c\circ f_c=f_c\circ\varphi_c$$

在 ∞ 的邻近可定义

$$\varphi_c(z)=z\prod_{k=0}^{\infty}[1+c/(f_c^k(z))^2]^{2^{\frac{1}{k+1}}}$$

其中各项主根式的选择是，对充分大的 z，$|f_c^k(z)|^2>|c|$ 对所有 k 均成立.

可以证明

i) φ_c 可扩张到 $U_c=\{z|G_c(z)>G_c(0)\}$，因而

$$\varphi_c: U_c\to c\backslash\overline{D}\exp(G_c(0))$$

是一解析同构且满足条件

$$\varphi_c(f_c(z))=[\varphi_c(z)]^2$$

ii) $G_c(z)=\log|\varphi_c(z)|, z\in U_c$

iii) φ_c 是唯一的

还可以证明 φ_c 是 z 和 c 的解析函数，由此可证如下结果：

（Ⅰ）若 $f_c^n(0)\to\infty$，则 $U_c=C\backslash K(f_c)$ 且 $\varphi_c: U_c\to C\backslash\overline{D}$ 是共形表达式；

（Ⅱ）若 $f_c^n(0)\to\infty$，则 $G_c(0)>0$ 且 $G_c(c)=2G_c(0)$，所以 $\varphi_c(c)$ 有定义. 从这一性质，可由 φ_c 诱导出 M 的余集上的映射 φ_M.

设 $f_c^n(0)\not\to\infty$，则对每一 $r>1$，由

$$\Gamma_c(r)=G_c^{-1}(\log r)=\{z\in C \mid |\varphi_c(z)|=r\} \tag{5.152}$$

定义的等位线是一条围住填充 J—集的简单闭曲线(见图 5.11). 设 $V_c(r)$ 是 $\Gamma_c(r)$ 所围成的单连通区域，则

$$K_{f_c}=\bigcap_{r>1} V_c(r) \tag{5.153}$$

M 集是复平面上的紧子集，所以也可定义唯一的标准化格林函数 $G_M: C\backslash M\to\mathscr{R}$. 参数平面上没有动态系统，但 G_M 可从 G_c 来诱导. 另外， φ_c 也可诱导到 M 的余集上，定义

$$\varphi_M: C\backslash M\to C\backslash D$$

$$\varphi_M(c)=\varphi_c(c),\quad c\in Uc$$

定理 5.30(Douady—Hubbard)　φ_M 是共形同构.

根据 φ_M 这一共形表达式可设调和函数

$$G_M(c)=\log|\varphi_M(c)|=G_c(c)$$

若 $f_c^n(0)\not\to\infty$，对每一 $r>1$，由

$$\Gamma_M(r)=G_M^{-1}(\log r)=\{c\in C \mid |\varphi_M(c)|=r\} \tag{5.154}$$

定义的等位线是围绕 M 集的简单闭曲线.

令 $V_m(r)$ 表示由 $\Gamma_M(r)$ 所围的单连通闭区域，而

$$M=\bigcap_{r>1} V_m(r) \tag{5.155}$$

因此，M 集是连通的.

M 集是单连通的. 若不然,则存在一条简单闭曲线 $\gamma \subset M$,围着一个单连通区域U和一个点$c \in U \cap (C \backslash M)$使得$\forall\ n \in N$, $|f_c^n(r)| \leqslant 2$;另一方面,$\exists\ n_0 \in N$ 使 $|f_c^n(0)| > 2$,与最大模原理相矛盾.

但 M 是否为弧连通的,人们至今尚不清楚.

欲对 M 的性质作更深入的研究,除双曲分支的中心和根以外,还有第三类参数值起着重要作用,这就是 Misurewicz 点.

称 c 为一 Misurewicz 点,如果在 f_c 的迭代下,0 的轨道是滞后周期的而不是周期的. 两个简单的例子是 $c=-2$ 和 $c=i$,前者的 $K_{f_c}=[-2,2]$,因而等于 $J(f_c)$. 实际上可以证明对任一 Misurewicz 点 c 有

$$J(f_c)=K_{f_c}$$

中心和 Misurewicz 点是 c 值中使点 0 在 f_c 迭代下轨道为有限的值的集合. 中心在 Int(M)中而 Misurewicz 点在 ∂M 上,这是因为存在 f_c 的任意小的扰动可使 0 跑向∞.

可以证明:若 c 属于某一双曲分支或是一 Misurewicz 点,则 K_{f_c}是局部连通的,即$\forall\ z \in K_{f_c}$,及 z 的任一邻域 U,存在 z 的一个连通邻域 $V \subset U$.

K_{f_c} 的等位线的正交轨道称为外射线,称

$$R_c(\theta)=\varphi_c^{-1}(\{re^{2\pi i\theta} | 1<r<\infty\}) \tag{5.156}$$

为有理变量 θ 的射线(见图 5.11). 同样地定义 M 集的等位线和外射线,并称

$$R_M(\theta)=\varphi_M^{-1}(\{re^{2\pi i\theta} | 1<r<\infty\}) \tag{5.157}$$

为有理变量 θ 的外射线.

当 K_{f_c} 局部连通时,共形表达式

$$\psi_c=\varphi_0^{-1}:C\backslash\overline{D}\rightarrow C\backslash K_{f_c}$$

有一个直到边界的连续扩张

$\gamma_c: T=\mathscr{R}/Z\to J(f_c)$, $t\to\varphi_c(e^{2\pi it})$

因此,若 K_{f_c} 局部连通时,则每一条外射线 $R_c(\theta)$ 到达 $J(f_c)$ 上一点 $\gamma_c(\theta)$. 但 $J(f_c)$ 中一点可以是几条射线的端点. 由此得

$f_c(R_c(t))=R_c(2t)$, $f_c(\gamma_c(t))=\gamma_c(2t)$

若 c 是某一周期为 k 的双曲分支的中心,则临界值 $c\in \mathrm{Int}K_{f_c}$,且 c 是 f_c^k 的超吸性不动点. 令 U_1 表示 $K_{f_c}\backslash J(f_c)$ 中包含 c 的分支,则存在一个在 U_1 内部共形,在闭包上连续的共轭映照 $h^c:\overline{U}_1\to\overline{D}$,使 f_c^k 与 $f_0(z)$ 共轭.

在 U_1 的边界上有唯一点 y_1,它是 f_c^k 的不动点. 因此, y_1 在 f_c 迭代下,是一个周期为 k 的周期点或周期为 k 的除数的周期点. $y_1\in J(f_c)$ 且确定了某些变量 $\gamma_c^{-1}(y_1)$,这些变量在周期倍增时是 k 周期的,相邻于 U_1 经常都有两条射线且汇合于 y_1.

例 5.16 对于 Douady 兔子,其中 0 是周期为 3 的周期点,边界点 y_1 是不动点 α_c. 有三条变量分别为 1/7,2/7 和 4/7 的射线汇集于 y_1. 相邻于 U_1 的两条射线变量分别是 1/7 和 2/7. 如图 5.21.

若c是一Misurewicz点, $c\in J(f_c)=K_{f_c}$ 且确定某些变量 $\gamma_c^{-1}(c)$,则这些变量在周期倍增时,是预周期的.

例 5.17 $c\approx-0.1028+0.95723i$ 的 Julia 集如图 5.21. 其中 0 点的轨道如下:$x_0=0\Rightarrow x_1=c\Rightarrow x_2\Rightarrow x_3\Rightarrow x_4=x_5$,不动点 $\alpha_c=x_4=x_5$ 是变量分别为 $\frac{9}{56},\frac{11}{56},\frac{15}{56}$ 三条外射线的端点.

既然 M 集的性质与 K_{f_c} 有相似之处,因此人们很想知道 M 集是否是局部连通的. 若 M 局部连通,则共形映照

$\varphi_M^{-1}: C\backslash\overline{D}\to C\backslash M$

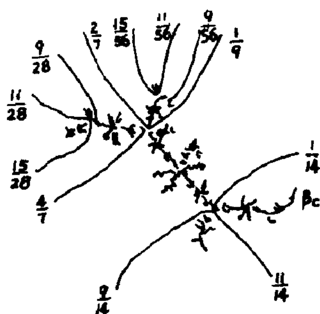


图 5.21　一种 Julia 集

可以连续地扩充到边界，从而可以得到 ∂M 的参数表示式，进而可知所有外射线都到达 ∂M. 人们猜测：M 是局部连通的. 目前每一张计算机图形都证实这一猜测，但至今未能给予证明.

另外，若 M 连通，则 M 的内部等于所有双曲分量的并集且 M 是弧连通的. 足以使人惊奇的是 Douady 和 Hubbard 证明的如下定理

定理 5.31(Douady－Hubbard)

Ⅰ)对于每一有理变量 $t=p/q$，　外射线 $R_M(t)$ 到达一点 $c=\gamma_M(t)$，c 或是一双曲线分支的根或是一 Misurewicz 点.

Ⅱ)若 t 是周期为 k 的周期点，则 c 是周期为 k 的双曲分支 W 的根. 设 c_0 是 W 的中心，并设 $\{t_1,t_2\}\subset\gamma_{c_0}^{-1}(y_1)$ 是 f_c 的动态平面上两条相邻于 U_1 并汇合于 y_1 的外射线的变量，则 $\gamma_m^{-1}(c)=\{t_1,t_2\}$.

Ⅲ)若 t 是严格预周期的，则 c 是一 Misurewicz 点且 $\gamma_c^{-1}(c)=\gamma_M^{-1}(c)$.

三. M—集的边界与 J 集

在第一部分中已说明了 ∂M 的分形性质，即 ∂M 呈现出类似 Sharkovskii 序的自相似性. 这里我们进一步讨论 ∂M 的复杂性以及为什么 M 会包含与它相仿的小图形，还将讨论它最吸引人的性质，即 ∂M 与 J 集之间的亲缘关系.

定理 5.32(Montel)　设 $\mathscr{F}$ 是定义在 U 上的一族函数，若 $\hat{C}$ 上存在三点 a，b，c 使

$$\{a,b,c\}\cup(\bigcup_{f\in\mathscr{F}} f(U))=\varnothing$$

则 $\mathscr{F}$ 是 U 上一正规族.

考虑由下面循环定义的函数族 $f_n:C\to C$

$$f_1(c)=c,\quad f_n(c)=[f_{n-1}(c)]^2+c,\quad n=2,3,\cdots$$

对固定的一个 c 值，序列 $\{0,f_1(c),\cdots,f_n(c)\}$ 正好是 f_c 迭代下 0 的轨道. 设 $c_0\in\partial M$，$\forall\ c\in C\backslash M$，则 $f_c(c)\to\infty$；而 $\forall\ c\in M$，则 $|f_c(c)|\leqslant 2$，因此对于 c_0 的任一邻域 U，$f_n|_U:U\to C$ 不正规.

根据上述构造和 Montel 定理，运用反证法，可证得下述两个结果

（Ⅰ）Misurewicz 点在 ∂M 上稠密；

（Ⅱ）∂M 包含在所有双曲分支的中心的闭包内.

这两条性质就合理地说明了 ∂M 为什么如此复杂.

从(5.150)知，M 集将 J 集分成连通和非连通两大类. 除此之外，M 集与 J 集之间存在着亲缘关系. M 集的每一部分都表示出相关 J 集族的特征. 比如，M 集的心形主体对应着 J 集中的分形拟圆周，把 ∂M 上 c 点周围的图形放大揭示出的形态也是与 c 点有关的 J 集的组成部分. 但至今未给出这一发现的严格证明. 值得注意的是，年轻的研究工作者 Tan Lei 已经证明：

在每一个 Missurewicz 点邻近，M 集与 J 集之间存在着相似性. 即是说，对恰好位于 ∂M 上的大多数点来说，用一强倍数的显微镜来观察动态平面上 c 点的邻域或者观察参数平面上 c 点的邻域，我们将发现，除相差一个旋转外，M 集和 J 集看起来是一样的. 精确陈述如下：

设 l 是最小的整数，使得 $z_l=f_c^l(0)$ 是一周期点，比如周期为 k. 并用 ρ 表示周期轨道 $\{x_l,\cdots,x_{l+k-1}\}$ 的特征值. 在动态平面上平移 J 集使 c 点移至 0 点，平移后的 J 集记作 $T_c(J(f_c))$，用 ρ^n 乘

$\tau_c(J(f_c))$. 然后，对任意选定的 $r>0$，观察以 r 为半径的圆盘 D_r 内 $X_n(r)$ 那部分，这里

$$X_n(r)=D_r\cap\rho^n(\tau_c(J(f_c)))$$

在参数平面，平移 M 集使 c 移至 0 点，平移后的 M 集记作 $\tau_c(M)$. 用 ρ^n 乘 $\tau_c(M)$，令

$$Y_n(r)=\rho^n(\tau_c(M))$$

则存在 $\lambda_c\neq0$，使得当 $n\to\infty$ 时，$X_n(r)$ 与集

$$X(r)=D_r\cap\lambda_c Y(r)$$

的 Hausdorff 距离趋于零.

上述结果表明，M 集起着无穷多个 J 集的直观图解目录表作用. M 好比一个图象存贮器，其中存贮着无穷多个千变万化的图象，如图 5.22 所示. 这一性质也许是目前所知的 M 集的最吸引人的性质之一.

在许多其它单个复杂参数的复解析映照族中，也出现了与 M 集甚为相似的集. 这些复解析映照有与 M 相似的集出现，其道理正好与 M 包含与它自身相仿的小图形一样，即这些映照或者它们的某些迭代可能局部地与 f_c 有着相似的性质. 因此，可以说 M 集具有普遍性. Douady 和 Hubbard 就曾考虑过类多项式映照.

解析映照 $f:U'\to U$ 称为 d 类多项式，如果 U 和 U′是 C 的同构于圆盘的开子集且 $U'\subset U$，同时 f 是正常 d 次的.

对单参数二次类多项式的映照族

$$f_\lambda:U'_\lambda\to U_\lambda$$

其中 $\lambda\in\Lambda$，Λ 同构于圆盘，存在唯一的临界点 $\omega_\lambda\in U'_\lambda$. 可以证明：若存在闭子集 $A\subset\Lambda$，同构于圆盘，使得 $\forall\lambda\in\Lambda\setminus\mathrm{Int}(A)$ 有 $f_\lambda(\omega_\lambda)\in U_\lambda\setminus U'_\lambda$，并且当 λ 扫过 A 时，$f_\lambda(\omega_\lambda)=\omega_\lambda$ 绕 o 转了一圈，则 Λ 中包含与 M 集相仿的图形. 因此，便不难理解为什么 M 集会无限嵌套着与它自己相仿的小图形了.

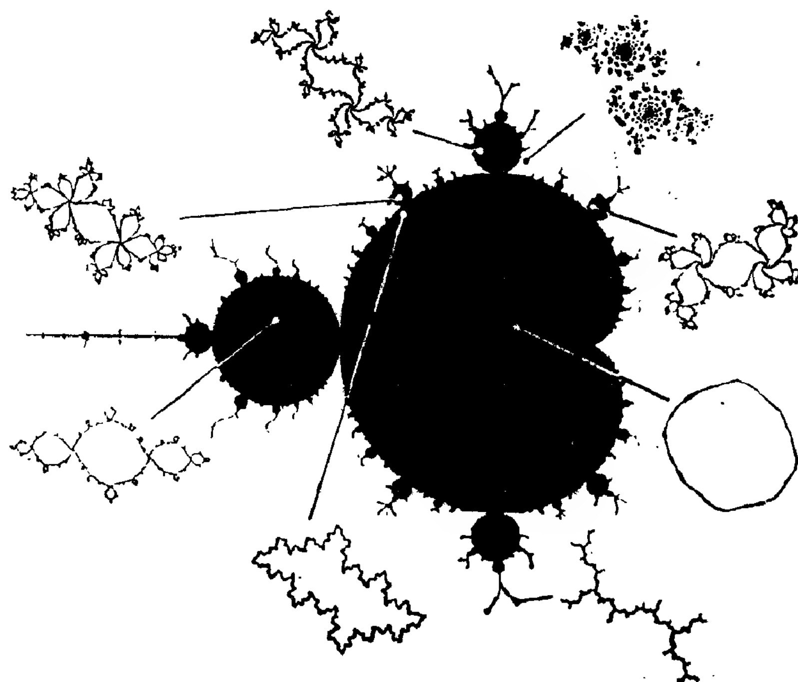


图 5.22 M 集的性质之一,J 集的图象存贮器

四. M—集的研究进展

H·Jürgens 和 H—O. Peitgen 等认为 M 集的性质过去一直是并且将来继续是数学研究的一个巨大难题. 从前两部分已经看到,通过 A·Douady 和 J·H·Hubbard 等人进行的基础研究工作,在解决这一难题方面已取得了巨大进展. 在这一课题的研究中,人们广泛采用了数学理论与计算机图形学相融合的研究方法. 其研究进展向那种把纯数学与计算机看作格格不入的传统数学观念提出了挑战.

迄今,M—集性质研究中所获得的最大成功是所谓M—集的静电位. 设M集带有一个电荷,将一个点电荷置于M—集外,通过测定该点上的静电力来测量这一电位. 结果证明,静电位的测定与确定点c是否属于M集有着密切联系. 目前,Jürgens 和 Peitgon 等人,正愈来愈多地借助计算机活动录像探索M—集并正在取得进展. 其它一些分形的三维电位再现及相关研究工作也获得相应发展.

Devenney 通过计算机数值实验观察到M—集的复杂图形实际上是许许多多不同周期的周期轨道的稳定区域共同构成的. 最近,黄永念运用自己提出的初等代数和复变函数的分析方法严格证明了 Devaney 指出的事实,给出了计算一维复映射 $f(z)=z^m+c$ 的任意周期 n 的周期轨道个数 N_n 的一般公式

$$N_n=\frac{1}{n}\left[m^n-\sum_{j=1}^{r}m^{e_i}+\sum_{j=2}^{r}\sum_{i=1}^{i-1}m^{e_{ij}}+\cdots+(-1)^r m^{e_{12\cdots r}}\right] \quad (5.158)$$

式中 $n=n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}$, $n_1<n_2<\cdots<n_r$ 是质数, $k_i\geqslant 1$ 且为整数, $i=1,\cdots,r$.

$$e_i=n/n_i,\quad e_{ij}=n/n_in_j,\cdots,\quad e_{12\cdots r}=n/\prod_{i=1}^{r}n_i$$

$e_{ijk\cdots}$ 的下标 $i,j,k,\cdots$ 互不相同.

通过对周期轨道稳定性的分析,黄永念证明了M—集及其广义情形的复杂结构由无穷多个不同周期轨道的稳定区域共同组成. 且得到周期为 n 的周期轨道稳定区域个数 I_n 与轨道数 N_n 有关系: $I_n=nN_n/m$.

对于不动点的轨道的稳定区域的中心位置在 c 平面上也是原点 c=0,其稳定区域的边界

$$c=m^{-\frac{1}{m-1}}e^{i\frac{\theta}{m-1}}\left(1-\frac{1}{m}e^{i\theta}\right)\quad (0\leqslant\theta\leqslant(m-1)2\pi)$$

m=2 时,其边界

$$c=\frac{1}{4}+\sin^2\frac{\theta}{2}e^{i\theta}\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

它就是M—集的最大心形区域边界. 周期2轨道的稳定区域是以 $c=-1$ 为圆心，$\frac{1}{4}$ 为半径的圆 $c=-1+\frac{1}{4}e^{i\theta}$

如今，M—集的概念已推广到其它含参函数族，含参函数系统等. 通过建立M—集有理射线的等价类，已获得抽象M—集的一个模型.

另外，∂M 的维数也是值得研究的问题之一，但目前尚未获得突破性进展.

§9 迭代函数系统

迭代函数系统IFS(Iterated Function System)是Barnsley和Demko作为构造分形集的统一方式而引入的. Julia集、Cantor集及其它很多分形集都可看成某些IFS的吸引集.

所谓迭代函数系统，简单地说，指紧度量空间M到自身的一组压缩映射 $\{W_n: M\to M, n=1,2,\cdots N\}$，即满足

$$d(W_n(x),W_n(y))\leqslant c_n d(x,y),\quad x、y\in M$$

$$n=1,\cdots,N,\qquad 0<c_n<1 \tag{5.159}$$

记作 $\{M;W_1,\cdots W_n\}$ 或 $\{M;W\}$ $(W=\{W_1,\cdots,W_n\})$. 定义集值映射

$$W: 2^M\to 2^M, W(F)=\bigcup_{i=1}^{n}W_i(F),\quad F\subset M$$

$x\in M$ 在 $\{M;W\}$ 下的吸引集定义为

$$A(x)=\lim_{n\to\infty}W^n(x)$$

其意义是 $a\in A(x)$ 当且仅当对 a 的任意邻域 U，存在无限多个 n 使 $U\cap W^n(x)\neq\varnothing$.

若 $A(x)$ 与 x 的选择无关，则称 $A=A(x)$ 为 $\{M;W\}$ 的吸引集. 它是M的紧子集，且在W下不变，即 $W(A)=A$.

定义 $\{M;W\}$ 的逆为M上的集值映射

$W^{-1}(x)=\{x\in M|W(x)\in M\}$

$\{M;W\}$的排斥集,即$\{M;W^{-1}\}$的吸引集.

设C表复平面,$f:C\to C$为有理映照,$\hat{C}$是黎曼球面.将f扩充为$\hat{C}$上的函数,则$\{\hat{C};f\}$的逆是一个IFS$\{\hat{C}|f_1^{-1},\cdots,f_n^{-1}\}$,其中$f_i^{-1}$($i=1,\cdots,n$, $n=\deg(f)$)是f的n个分支.因为f的吸性不动点至多为$2n-2$个,所以对几乎所有的$z\in\hat{C}$,$A_{f^{-1}}(z)=A_{f^{-1}}$与z的选择无关,且可证明

$$A_{f^{-1}}=J(f)$$

这说明f的Julia集是$\{\hat{C};f\}$的排斥集,或$\{\hat{C};f_1^{-1},\cdots,f_n^{-1}\}$的吸引集.

设$R(y,z)$是复变量$y,z\in C$的复系数多项式, y,z的度数分别为$\deg y=n$,$\deg z=m\geqslant 1$, 则由$W_i(z)$($i=1,\cdots,n$)定义的IFS$\{\hat{C};W\}$称为$R(y,z)$生成的迭代Rieman曲面.其中$W_i(z)$($i=1,\cdots,n$)是$R(y,z)=0,z\in\hat{C}$的n个解.

例5.18 设a, b, c是不共线三点

$R(y,z)=(2y-z-a)(2y-z-b)(2y-z-c)$

则$\forall x\in C$,$A(x)=A$是以a, b, c为顶点的SierPinski三角形.

例5.19 设a, b, c是不共线三点.

$R(y,z)=(y-3z+2a)(y-3z+2b)(2y-3z+c)$生成的IFS的吸引集是$\{\infty\}$,而排斥集为一Cantor树.

$\{M;W\}$是双曲的指存在常数$s\in[0,1)$,满足

$$|W_i(x)-W_i(y)|<s|x-y|,\quad x、y\in M,\ i=1,\cdots,n \quad (5.160)$$

对具有双曲性的IFS,其吸引集的结构和分维已有如下深刻结果.

定理5.33 设$\{M;W\}$是双曲IFS,则它有唯一吸引集A,而且存在Cantor集到A上的一个连续映射.

定理5.34 设$\{M;W\}$是双曲IFS,且$W_i(A)\cap W_j(A)=\varnothing$,

$1\leqslant i\neq j\leqslant n$，A 是上述定理中的吸引集，则

$$W^{-1}|_A\approx\sigma|_{\sum_n}$$

此处$\sum_n$是 n 个符号的单边符号空间，σ 是移位映射.

定理 5.35 在上述定理条件下，若 M 是 $\mathscr{R}^d$ 的子集，且存在常数 s_i 和 $\bar{s}_i$，$0<s_i\leqslant\bar{s}_i<1$，使得

$$s_i|x-y|\leqslant|W_i(x)-W_i(y)|\leqslant\bar{s}_i|x-y|$$

$$x、y\in A,\quad i=1,\cdots,n$$

则 A 的 Hausdorff 维数 $D_H(A)$满足

$$\min\{t,u\}\leqslant D_H(A)\leqslant d \tag{5.161}$$

其中 t，u 是下述方程的正数解

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^{\,t}=1=\sum_{i=1}^{n}\bar{s}_i^{\,u}$$

若对某些 $i\neq j$，$W_i(A)\cap W_j(A)\neq\varnothing$，则(5.161)上界的估计依然成立.

例 5.20 在函数系$\{c,sz+1,sz-1\}$中取 $s=\dfrac{1}{2}(1+i)$，则其迭代的不变集为著名的分形集——龙曲线.

IFS 的一个重要应用是重建分形集，尤其是利用 IFS 建立分形内插法. 由此，可从实验数据作分形重建.

第六章

多重分形

多重分形(Multifractals)是分形理论的进一步发展,它是为研究自然界中的非匀称和各向异性现象而提出的.它与简单分形的区别在于标度性质与方向有关,这类奇异集的维数构成一个连续的谱.本章将介绍有关多重分形的一些问题.

§1. 多重分形的概念与例子

多重分形也称作多标度分形或多重分形测度.对于诸如湍流、混沌,分形生长(如DLA)等许许多多非均匀的分形现象,一个维数无法描述其全部特征,必须用多重分形测度或维数的连续谱来表示.

测度是熟知的长度、面积、体积等一类量在奇异集合上的推广.更广义地,这里测度可以看作是展布在一个"支集"(Support)上的质量、概率或其它物理量,支集可以是欧氏空间或度量空间上的通常子集(如:区间、圆盘、矩形等)或分形集合(如:康托集、谢尔品斯基地毯、DLA等).多重分形测度是一种奇异测度,即不存在密度函数的测度.换言之,多重分形是定义在分形上,由多个标度

指数的奇异测度构成的无限集合.

三分康托集是众所周知的,可将其推广到广义双标度情形. 每次将一线段等分成三个子线段,去掉中间一段的概率为 p_1,去掉两端线段的概率为 p_2,$p_1>p_2$ 且 $p_1+2p_2=1$. 在每一小段上重复这样的过程,经过几次构造后,概率分布很不均匀. 当如此嵌套的步数无限增大时,所形成的概率分布就是一个多重分形.

将平面上的一个单位正方形分成 9 个小正方形,然后随机去掉一些小正方形. 设第 i 个正方形不被去掉的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots 9)$,然后将每个方格再分成 9 个更小方格. 第二步,第 i 个大方格中的第 j 个小方格不被去掉的概率为 $p_i \cdot p_j$. 按此方法重复这一过程至极限情形,所得到的概率分布是平面上的一个多重分形. 这一结构是非均匀且各向异性的. 特别当 $p_{2i-1}=1, i=1,\cdots,5$ 且 $p_{2i}=0, i=1,\cdots,4$ 时得到的是 Hausdorff 维数 $D=\log5/\log3$ 的一个简单分形.

多重分形至今还没有严格的定义. 我们给出的下述定义来自于前面例子的启发.

设 $\mathscr{R}^d$ 是 d 维欧氏空间或度量空间,X 是 $\mathscr{R}^d$ 的一个 d 维子集,它是测度的支集,或某个动力系统的不变集. 对 z 进行适当划分并赋以概率不变测度 μ_0. 这里的划分类似于前面的例子,是迭式的或递归的. 设 α 是与划分有关的一个参数,第 n 步划分后的 X 的子集记作 $X_n(\alpha)$.

若 $X_\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\alpha)$ 是一分形集,则称它是 (X,μ) 的分形子集. 若在划分下,(X,μ) 产生的分形集,可以表成若干分形子集的并,且每一分形子集有不同的分维,则称此分形集为多重分形.

设 (X,μ) 被划分成尺度为 δ 的单元(cell),且单元测度 μ_α 与 δ 有幂律关系

$$\mu_\alpha=\delta^\alpha \tag{6.1}$$

则称 α 为 Lipschitz－Hölder 指数(简称 Hölder 指数)．由于它控制着概率密度的奇异性，因此也称作奇异性指数．

对概率测度为 μ_α 的分形子集 X_α 的任意可列 δ—覆盖 $\{U_i\}_{i\in N}$，即 $0<\text{diam}Ui\leqslant\delta$，定义

$$\mathcal{H}_\delta^r(x_\alpha,u_\alpha)=\inf\{\sum(\text{diam}U_i)^r|\{U_i\}_{i\in N},\text{为 } X_\alpha \text{ 的 } \delta\text{—覆盖}\} \tag{6.2}$$

(X_α,μ_α)的 Hausdorff r—维测度定义为

$$\mathcal{H}^r(X_\alpha,\mu_\alpha)=\lim_{r\to 0}\mathcal{H}_\delta^r(X_\alpha,\mu_\alpha) \tag{6.3}$$

若存在临界指数 $f(\alpha)$，使 $r>f(\alpha)$时，$\mathcal{H}^r(X_\alpha,\mu_\alpha)=0$；$r<f(\alpha)$时，$\mathcal{H}^r(X_\alpha,\mu_\alpha)=\infty$；$r=f(\alpha)$时，$0<\mathcal{H}^r(X_\alpha,\mu_\alpha)<\infty$．则称 $f(\alpha)$为多重分形的奇异谱．

由定义知 $f(\alpha)$就是分形子集 X_α 的 Hausdorff 维数．当

$X_\alpha\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j$， $0<\text{diam}(U_j)\leqslant\delta$， $j\in N$ 时，

$$f(\alpha)=\inf\{r|\liminf_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}(\text{diam}U_j)^r=0\}$$

$$=\sup\{r|\liminf_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}(\text{diam}U_j)^r=\infty\} \tag{6.4}$$

当$\{U_j\}$是尺寸为 δ 的盒子时，若$[\alpha,\alpha+d\alpha]$内概率测度为 μ_α 的单元个数为 $N(\alpha)$(即覆盖盒子数)，则 $\mathcal{H}_\delta^r(X_\alpha,\mu_\alpha)=N(\alpha)\delta^r$．因此当 $N(\alpha)\sim\delta^{-f(\alpha)}$时，$\mathcal{H}^r(X_\alpha,\mu_\alpha)$有限．由此可得

$$f(\alpha)=-\lim_{\delta\to 0}\ln N(\alpha)/\ln\delta \tag{6.5}$$

$f(\alpha)$是描述区域维数的连续谱，在 $\alpha-f(\alpha)$坐标系中为一单峰图象．现在的共识是：$f(\alpha)$和 α 是描述多重分形局部特性的一套基本语言．另一套q—D(q)语言是从信息论角度引入的．测度支集(X,μ)的单元记作$\{\triangle_i\}$，μ是不变概率测度．第i单元的概率 $p_i=\int_{\triangle_i}d\mu(x)$，当 $q\gg 1$ 时，若 $p_i>p_j$，则 $p_i^q\gg p_j^q$．考虑 p_i 对测度 μ

和维数的贡献大小.对较大概率赋以较高权重,有以下定义

概率测度 μ 的 q 阶矩定义为

$$N(q,\delta)=\sum_i p^q(\delta) \tag{6.6}$$

广义 r—维测度定义为

$$\mathscr{M}_\delta^r(q)=\sum_i p_i^q(\delta)\delta^r=N(q,\delta)\delta^r \tag{6.7}$$

$$\mathscr{M}^r(q)=\lim_{\delta\to 0}\mathscr{M}_\delta^r(q) \tag{6.8}$$

若存在依赖于 p_i 的 q 阶矩选择的临界指数 $\tau(q)$

$$\tau(q)=\inf\{r\,|\,\mathscr{M}^r(q)=0\}=\sup\{r\,|\,\mathscr{M}^r_{(q)}=\infty\} \tag{6.9}$$

则称 $\tau(q)$ 为质量指数.

根据 μ 的 q 阶矩,还可以引入广义 Renyi 维数 D(q)

$$D(q)=\begin{cases}\dfrac{1}{q-1}\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\ln\sum\limits_i p_i^q(\delta)}{\ln\delta} & q\neq 1\\[2ex] \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\sum p_i(\delta)\ln p_i(\delta)}{\ln\delta} & q=1\end{cases} \tag{6.10}$$

例 6.1 二项倍增过程

设测度支集 X=[0,1],使用二分法对 X 进行迭式划分.第一步X被分成等长($\delta=1/2$)的两段,令左段测度$\mu_0=p$,右段测度$\mu_1=1-p$.重复这一过程,第 n 步得到 $N=2^n$ 个单元$\{\triangle_i\}_{i=1}^N$,每个的长度 $\delta=2^{-n}$, $\triangle_i$ 的测度

$$\mu_i=\mu_0^k\mu_1^{(n-k)}=p^k(1-p)^{n-k},\quad i=0,1,\cdots,N-1$$

k 是实数 $x=i/2^n$ 的二进制表示中"0"的个数.令

$$\xi=k/n,\quad k=0,1,\cdots,n$$

则有

$$N_n(\xi)=\binom{n}{\xi n}=n!\ /(\xi n)!\ [(1-\xi)n]!$$

个单元的测度为

$$\mu_\xi=\triangle^n(\xi)=\mu_0^{n\xi}\mu_1^{(1-\xi)n}=p^{n\xi}(1-p)^{(1-\xi)n}$$

这 $N_n(\xi)$ 个单元作成子集 $X_n(\xi)\subset X$，$X_\xi=\lim X_n(\xi)$ 是分形子集．用尺度为 δ 的盒子覆盖 X_ξ，由定义 4 知 X_ξ 的 r—维 Hausdorff 测度．

$$\mathscr{H}_\delta^r(X_\xi)=\inf\{\sum_{X(\xi)}\delta^r \mid X_\xi \text{ 的任一 } \delta\text{—覆盖}\}=N(\xi)\delta^r$$

运用 Stirling 公式： $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$，则

$$N_n(\xi)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}}\exp\{-n[\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)]\}$$

由 $\mathscr{H}_\delta^r\sim\delta^{-f(\xi)}\delta^r=\delta^{-f(\xi)+r}$， $n=-\ln\delta/\ln2$， 指数 $f(\xi)$ 定义为

$$f(\xi)=-[\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)]/\ln2$$

$r=f(\xi)$ 时，$\mathscr{H}^r(X_\xi)$ 为非零有限值，X_ξ 的 Hausdorff 维数 $D(\xi)=f(\xi)$．

$\forall\ x(\xi)\in X_\xi$，对应一给定的 ξ 值，则

$$\mu_\xi=\mathscr{H}^r(x(\xi)+\delta)-\mathscr{H}^r(x(\xi))=\delta^\alpha$$

于是得到 Hölder 指数

$$\alpha=-[\xi\ln p+(1-\xi)\ln(1-p)]/\ln2 \qquad \xi\in[0,1] \tag{6.11}$$

可见 α 与 ξ 呈线性关系，从中解出 $\xi=\xi(\alpha)$，代入(6.11)得到 $f(\alpha)=f(\xi(\alpha))$．

考虑奇异测度的 q 阶矩，则由(6.6)和下节的定理，得

$$N(q,\delta)=\sum_k\binom{n}{k}p^{qk}(1-p)^{q(n-k)}=[p^q+(1-p)^q]^n$$

$$\tau(q)=\ln[p^q+(1-p)^q]/\ln2$$

$$\alpha(q)=-[p^q\ln p+(1-p)^q\ln(1-p)]/[p^q+(1-p)^q]\ln2$$

$$D(q)=\begin{cases}\ln[p^q+(1-p)^q]/(1-q)\ln2 & q\neq1\\ -[p\ln p+(1-p)\ln(1-p)]/\ln2 & q=1\end{cases}$$

$$f(q)=-q\,\frac{p^q\ln p+(1-p)^q\ln(1-p)}{[p^q+(1-p)^q]\ln2}+\frac{\ln[p^q+(1-p)^q]}{\ln2}$$

§2 质量指数、广义维与奇异谱

上节我们给出了多重分形的概念与例子．这节我们来讨论质量指数、广义维及奇异谱的性质以及它们之间的相互联系．

由 $\tau(q)$的定义，$r=\tau(q)$时，$\mu^r(q)$为非零有限值，由(6.7)知，$N(q,\tau)\sim\delta^{-\tau(q)}$，因此

$$\tau_{(q)}=-\lim_{\delta\to 0}\ln N(q,\delta)/\ln\delta=-\lim_{\delta\to 0}\ln\sum p_i{}^q(\delta)/\ln\delta \qquad (6.12)$$

当 $q\neq 1$ 时， 比较上式与(6.10)第一式得 $\tau(q)=(1-q)D(q)$且 $D(0)=-\tau(0)$是盒维数．由概率测度归一化知 $\tau(1)=0$．(6.12)关于 q 求得导数

$$\tau'(q)=-\lim_{\delta\to 0}\sum_i P_i{}^q(\delta)\ln p_i(\delta)/[\sum_i p_i{}^q(\delta)]\ln\delta$$

从而

$$\tau'(1)=-\lim_{\delta\to 0}\sum p_i(\delta)\ln p_i(\delta)/\ln\delta=\lim_{\delta\to 0}S(\delta)/\ln\delta$$

与(6.10)第二式比较知， $D(1)=-\tau'(1)$， 上式中 $S(\delta)=-\sum_i p_i\ln p_i$ 恰好是测度分割的 Shannon 熵，因此 D(1)是信息维．于是我们得到 $\tau(q)$与 $D(q)$的关系

$$D(q)=\begin{cases}\tau(q)/(1-q) & q\neq 1\\ -\tau'(1) & q=1\text{ 且 }\tau(q)\text{可微}\end{cases} \qquad (6.13)$$

从§1 知，复盖(X,μ)的分形子集 X_α 所需尺寸为 δ 的盒子个数 $N(\alpha,\delta)\sim\sigma(\alpha)d\alpha\delta^{-f(\alpha)}$，此处 $\sigma(\alpha)d\alpha$ 是位于$[\alpha,\alpha+d\alpha]$中的分形子集的个数， 由定义 3， $\mu_\alpha=\delta^\alpha$， 因而集 $X=\bigcup_\alpha X_\alpha$ 的广义 r 维测度

$$\mathscr{M}^r_\delta(q)=\int\sigma(\alpha)\delta^{-f(\alpha)}\delta^{\alpha q}\delta^r d\alpha$$

$$=\int\sigma(\alpha)\delta^{q\alpha-f(\alpha)+r}d\alpha \qquad (6.14)$$

当 $\alpha\to 0$ 时，根据最陡下降法，上述积分由被积函数的最大值支配．此时指数 $q\alpha-f(\alpha)$接近于它的极小值，这要求

$$\frac{d}{d\alpha}[q\alpha-f(\alpha)]_{\alpha=\alpha(q)}=0$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[q\alpha-f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha(q)}>0$$

由(6.14)知，$\mathscr{M}_\delta^\tau(q)\sim\delta^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))+\tau}$. 依 $\tau(q)$定义可导出 Legendre 变换

$$\frac{df}{d\alpha}=q \tag{6.15}$$

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2}<0 \tag{6.16}$$

$$\tau(q)=f(\alpha)-q\alpha(q) \tag{6.17}$$

$$\alpha(q)=-\frac{d\tau}{dq} \tag{6.18}$$

(6.13),(6.17),(6.18)构成了多重分形理论的内核.它们说明 $f(\alpha)$与 $D(q)$可以互换，同时可以通过这些关系式确定分形测度的奇异性谱函数 $f(\alpha)$.(6.15)与(6.16)说明 $f(\alpha)$是 α 的凸函数，因而为单峰图象，如图 6.1 所示. $f(\alpha)$在每点的斜率为 q，当 $q\to+\infty$时，最大的 p_i 支配 $N(q,\delta)$，它对应于 α 取最小值和 $f(\alpha)$取零的一点；当 $q\to-\infty$时，最小的 p_i 支配 $N(q,\delta)$，对应于 α 取最大值和 $f(\alpha)$取零的点；$q=0$ 时，$f(\alpha)$取最大值，并且 $D(0)=\tau(0)$， 即 $f(\alpha)$的最大值为盒维数 D_0. 由 $\tau(1)=0$ 知，$\alpha(1)=f(\alpha(1))$. 图 6.1 示出了奇异性谱函数对于奇异强度的一般变化关系.

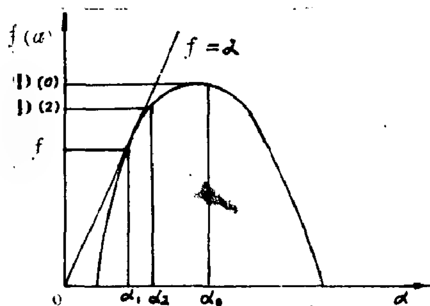


图 6.1 f(α)谱与 α 的关系

前面讨论的 $f(\alpha)-\alpha$，与 $\tau(q)-q$ 是一对共轭热力学变量，$\tau(q)$与 $f(\alpha)$可微时，$f(\alpha)$可从 $\tau(q)$经 Legendre 变换得到. 实际上

$f(\alpha(q))$与$\alpha(q)$可用另一方法直接求出. 构造正规测度$\mu(q)$的单参数族

$$\mu_i(q,\delta)=p_i^q(\delta)/\sum_j p_j^q(\delta) \tag{6.19}$$

若$\tau(q)$可微,则

$$\begin{aligned} f(q) &= -q\tau'(q)+\tau(q) \\ &= q\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_i p_i^q \ln p_i}{(\sum_i p_i^q)\ln\delta}-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\sum p_i^q}{\ln\delta} \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\sum p_i^q \ln p_i^q/\sum_j q_j^q}{(\sum_j p_j^q)\ln\delta} \end{aligned}$$

由此得到计算$f(q)$的公式

$$f(q)=\lim_{\delta\to 0}\sum_i \mu_i(q,\delta)\ln\mu_i(q,\delta)/\ln\delta \tag{6.20}$$

现将$\mu_i(q,\delta)$作为新的概率测度,$\mu(q)$的支集的 Hausdorff 维数通过 Shannon 熵给出. 将$\alpha(q)$作为$\alpha_i=\ln p_i/\ln\delta$的均值,得到

$$\alpha(q)=\lim_{\delta\to 0}\sum_i \mu_i(q,\delta)\ln p_i(\delta)/\ln\delta \tag{6.21}$$

上面(6.20)和(6.21)的优点是能直接求$f(\alpha)$谱和α,且无需要求$\tau(q)$可微.

§3 D(q)的上下界与极限

从广义维的定义知道,极限情形$D(\pm\infty)$具有特殊意义. 从(6.10)知,$D(+\infty)$描述相空间中测度最集中区域的标度行为,而$D(-\infty)$描述测度最稀疏区域的标度行为.

运用简单的代数不等式

$$\left(\sum_i p_i a_i^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\sum_i p_i a_i^{r'}\right)^{1/r'} \tag{6.22}$$

(式中$r,r'\in R, rr'\neq 0, r'>r, a_i>0, P_i\geqslant 0$且$\sum_i p_i=1$)可以证明

$$D(q')\leqslant D(q) \qquad \forall\, q,q'\in R \qquad q'>q \tag{6.23}$$

这说明$D(q)$随q增大而减少. 如果分形是均匀的(简单分形),即测度没有奇异性,此时对$\forall\, q$、$q'\in R$,有$D(q)=D(q')$. 由此可以说,对于各种q值$D(q)$差异越大,相应测度就越不均匀. (6.23)说明$D(q)$是$D(q')$的一个上界. 另一方面,对任意实数a_i和r,有代数不等式

$$\left(\sum_i a_i\right)^r\geqslant\sum_i a_i^r \qquad r\geqslant 1$$

$$\left(\sum_i a_i\right)^r\leqslant\sum_i a_i^r \qquad 0\leqslant r\leqslant 1$$

选取$a_i=p_i^q$, $r=q'/q$. 经过简单推导,可以得到

$$D(q)(q-1)/q\leqslant D(q')(q'-1)/q' \tag{6.24}$$

由此式给出$D(q')$的一个下界

$$D(q')\geqslant D(q)q'(q-1)/q(q'-1) \tag{6.25}$$

同时容易证明

$$D(q)\geqslant 0 \qquad \forall\, q\in R \tag{6.26}$$

运用(6.23)和(6.24)可以给出$D(q)$的极限所满足的关系

$$\frac{1}{2}D(2)\leqslant D(\infty)\leqslant D(2) \tag{6.27}$$

$$D(-1)\leqslant D(-\infty)\leqslant 2D(-1) \tag{6.28}$$

这两式在理论与应用两方面都有重要意义. 理论上,它给出了$|q|$充分大时,$D(q)$的范围;应用上,由于计算低$|q|$值的$D(q)$比高$|q|$值的$D(q)$容易得多,所以可根据$D(2)$和$D(-1)$的值对$D(\pm\infty)$作出估计. 当$|q|$较大时可用以检验$D(q)$计算的数值结果. 特别是对$D(+\infty)$的检验和估计很方便,因为对于从时间变化观察到的动力系统已有了计算$D(2)$的算法,即G—P算法.

若$D(q)$是q的光滑函数,可以进一步估计$D'(q)$的界. 我们来导出$D'(q)$的一个易于判别和应用的下界.

对$q>q'$,从(6.23)知,$D'(q)\leqslant 0$. 又从(6.25)知,对

$q\overline{\in}[0,1]$, $\frac{d}{dq}[D(q)(q-1)/q]\geqslant 0$,这等价于

$$D'(q)\geqslant -D(q)/q(q-1) \tag{6.29}$$

若 $q>-\infty$,则由(6.23)得 $D(q)\leqslant D(-\infty)$. 若 $q>1, \forall\ q<q'$,由(6.25)知

$$D(q)(q-1)/q\leqslant \lim_{q'\to\infty} D(q')(q'-1)/q'=D(\infty)$$

即 $D(q)\leqslant D(\infty)q/q-1$. 又 $q\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,因此总有 $1/q(q-1)>0$. 从(6.27)和(6.29)得

$$-2D(-1)/q(q-1)\leqslant D'(q)\leqslant 0 \qquad -\infty<q<0 \tag{6.30}$$

$$-D(2)/(q-1)^2\leqslant D'(q)\leqslant 0 \qquad 1<q<\infty \tag{6.31}$$

若 $D(q)$ 和 $f(\alpha)$ 可微,运用(6.13),(6.17)和(6.18),可证

$$\alpha(q)=D(q)+(q-1)D'(q) \tag{6.32}$$

$$f(\alpha(q))=D(q)+q(q-1)D'(q) \tag{6.33}$$

再把(6.30)和(6.31)代入上述两式可以得到

$$D(q)\leqslant\alpha(q)\leqslant 2D(-1)(q-1)/q \qquad -\infty<q<0 \tag{6.34}$$

$$D(q)(q-1)/q\leqslant\alpha(q)\leqslant D(2)q/(q-1) \qquad 1<q<\infty \tag{6.35}$$

$$0\leqslant f(\alpha(q))\leqslant 2D(-1) \qquad -\infty<q<0 \tag{6.36}$$

$$0\leqslant f(\alpha(q))\leqslant D(2)q/(q-1) \qquad 1<q<\infty \tag{6.37}$$

于是可以给出 α 和 $f(\alpha)$ 的上、下界与极限

$$\frac{1}{2}D(2)\leqslant\alpha(+\infty)\leqslant D(2) \tag{6.38}$$

$$D(-1)\leqslant\alpha(-\infty)\leqslant 2D(-1) \tag{6.39}$$

$$0\leqslant f(\alpha(+\infty))\leqslant D(2) \tag{6.40}$$

$$0\leqslant f(\alpha(-\infty))\leqslant 2D(-1) \tag{6.41}$$

从(6.38)、5(6.39)可见,$\alpha(+\infty)$与 $D(\pm\infty)$有相同的上下界. 当 $|q|$ 较大时,(6.38)、(6.41)用 $D(-1)$ 和 $D(2)$ 给出了 $\alpha(q)$ 与 $f(\alpha(q))$ 的范围,可用于检验(6.20)和(6.21)计算的数值结果.

对 $q\in(0,1)$,从(6.33)解得

$$D'(q)=[f(\alpha(q))-D(q)]/q(q-1)$$

由于对任意 $\alpha(q)$ $f(\alpha(q))\leqslant D(0)$,于是从上式得

$$[D(0)-D(q)]/q(q-1)\leqslant D'(q)\leqslant 0 \quad q\in(0,1) \tag{6.42}$$

另外，易知

$$D'(0)=f(\alpha(0))-\alpha(0)=D(0)-\alpha(0) \tag{6.43}$$

下面我们分析质量指数$\tau(q)$及其导数$\tau'(q)$的上下界与极限. 首先从(6.13)、(6.17)、(6.18)及(6.12)等易得$\tau(0)=D(0)$，$\tau(1)=0$，$\tau'(0)=-\alpha(0)$，$\tau'(1)=-D(1)$，$\lim\limits_{q\to-\infty}\tau(q)=-\infty$，$\lim\limits_{q\to\infty}\tau(q)=\infty$，一般地，若$\tau(q)$可微且$q$有限，则

$$-qD(q)\leqslant\tau(q)\leqslant 2D(-1)(2-q) \qquad -\infty<q<0 \tag{6.44}$$

$$-D(2)q^2/(q-1)\leqslant\tau(q)\leqslant D(2)q/(q-1)-D(q)(q-1) \qquad 1<q<\infty \tag{6.45}$$

$$0<\tau(q)<D(q) \qquad 0<q<1 \tag{6.46}$$

因为$-\tau'(q)=\alpha(q)$，于是得

$$2D(-1)(1-q)/q\leqslant\tau'(q)\leqslant 0 \qquad -\infty<q<0$$

$$-D(2)q/(q-1)\leqslant\tau'(q)\leqslant-\frac{1}{2}D(2)(q-1)/q \qquad 1<q<\infty$$

于是得到$\tau'(q)$的极限

$$-2D(-1)\leqslant\tau'(-\infty)\leqslant 0$$

$$-D(2)\leqslant\tau'(+\infty)\leqslant-\frac{1}{2}D(2)$$

当$q\in(0,1)$时，由(6.32)和(6.42)可以得到

$$-[D(0)(q+1)-D(1)]/q\leqslant\tau'(q)=-\alpha(q)\leqslant-D(1)$$

实际上，还可以求出$\tau'(\pm\infty)$与α的精确关系. 对任意概率测度μ，设μ_+、μ_-分别是概率$\{p_i\}$的最大值和最小值. 由(6.1)

$$\lim_{q\to-\infty}\tau'(q)=-\lim_{q\to-\infty}\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum\limits_i\mu_-{}^q-\ln\mu_-}{\sum\limits_j\mu_-{}^q-\ln\delta}=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\mu}{\ln\delta}=-\alpha_{max}$$

同理可证

$$\lim_{q\to\infty}\tau'(q) = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\mu_+}{\ln\delta} = -\alpha_{mim}.$$

在上节例1中，对于 $p\leqslant 1/2$的二项倍增测度

$$\alpha_{mim} = \alpha(0) = -\ln(1-p)/\ln 2$$

$$\alpha_{max} = \alpha(1) = -\ln p/\ln 2$$

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\ln\xi - \ln(1-\xi)}{\ln p - \ln(1-p)}$$

令 $f'(\alpha)=0$知，$\xi=\frac{1}{2}$时，$f(\alpha)$取最大值. 由(6.11)知，$\alpha_0 = -[\ln p + \ln(1-p)]/2\ln 2$时，$f_{max}=f(\alpha_0)=1$；令 $p=0.7$，知 $\alpha\approx 1.258$时，$f_{max}=f(\alpha_0)=1$，$\alpha_{min}\approx 0.5146$，$\alpha_{max}\approx 1.73697$. 而 $f(\alpha_{mim})=f(\alpha_{max})=0$，$f(\alpha)$为单峰图象，因此可以大致作出 $f(\alpha)$ 曲线如图6.2. 这一谱曲线很准确地描述了几种全发达湍流中通过耗散场的一维截面的多重分形谱.

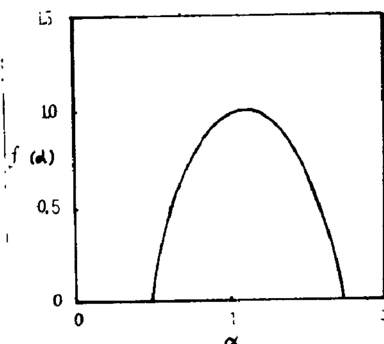


图6.2 f(α)单峰图象

下面我们再举一个比二项倍增过程更一般的例子.

例6.2 设支集 X 的线度为 l，其上展布着单位测度. 第一步将 X 剖分成 N 个单元，它们具有两种不同尺寸和测度. 设长度为 l_1 和 l_2 的单元个数分别为 n_1、n_2，相应测度为 p_1、p_2，记第i步的 $\mathscr{M}_\delta^i(q)=\Gamma_i$，则

$$\Gamma_1 = n_1 p_1^q l_1^{-\tau} + n_2 p_2^q l_2^{-\tau}$$

这里 $n_1+n_2=N$. 下一步，每一个单元又分成 n 个小单元. 则

$$\Gamma_2 = n_1^2(p_1^q l_1^{-\tau})^2 + 2n_1 n_2 p_1^q p_2^q (l_1 l_2)^{-\tau} + n_2^2(p_2^q l_2^{-\tau})^2 = \Gamma_1^2$$

依归纳法可知，第 n 步，$\Gamma_n = \Gamma_1^n$. 由此可见 Γ_1是生成元. 由概率测度归一化知，$\tau(q)$是 $\Gamma_n(q,\tau)=1$的解. 即

$$n_1 p_1^q l_1^{-\tau} + n_2 p_2^q l_2^{-\tau} = 1 \tag{6.47}$$

的解. 为简化计, 取 $l_1=\delta, l_2=\delta^2$, 而每个单元的测度正比于尺度, 即

$$p_k = \delta^{kd}/(n_1\delta^d + n_2\delta^{2d}) \qquad k=1,2$$

d 是 X 的拓朴维数, 这样可将(6.47)写成 $\delta_{d\tau}$的二次方程, 其解

$$\tau(q) = dq + \ln\left[\frac{(n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}-n_1}{2n_2}\right]/l_n\delta$$

式中 $r=n_1\delta^d+n_2\delta^{2d}=\delta^{kd}/p_k$. 于是由(6.13)、(6.17)和(6.18)得到

$$D(q)=\begin{cases} dq/(q-1)+\ln\left[\dfrac{(n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}-n_1}{2n_2}\right]/(q-1)\ln\delta & q\neq 1 \\ d+2n_2 r\ln r/[(n_1^2+4n_2r)^{1/2}-n_1](n_1^2+4n_2r)^{1/2}\ln\delta & q=1 \end{cases}$$

特别

$$\begin{aligned} D_{-\infty} &= \alpha_{max} + d\ln r/2\ln\delta \\ &= \ln p_2/\ln\delta^2 \end{aligned}$$

$$D_{+\infty} = \alpha_{mim} = d - \ln r/\ln\delta = \ln p_1/\ln\delta$$

由 Legendre 变换给出 $f(\alpha)$谱

$$\alpha(q) = d - \frac{r^q \ln r}{\ln\delta}\frac{2n_2}{[(n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}-n_1](n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}}$$

$$f(\alpha(q)) = \frac{1}{\ln\delta}\ln\left[\frac{(n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}-n_1}{2n_2}\right] - \frac{1}{\ln\delta}\frac{2qn_2r^q\ln r}{[(n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}-n_1](n_1^2+4n_2r^q)^{1/2}}$$

取 $X=[0,1], \delta=\frac{1}{2}, p_1=\frac{2}{3}, p_2=\frac{1}{3}$, 则得到双标度康托集

$$D_q = \frac{1}{q-1}\left\{q+\frac{1}{\ln 2}\ln\left[\frac{(1+4\times(3/4)^q)^{1/2}-1}{2}\right]\right\}$$

$$D_0 = \ln[\sqrt{5}+1]/\ln 2 \approx 0.6942$$

$$D_{-\infty} = \ln\frac{1}{3}/\ln\frac{1}{4} \approx 0.7925$$

$$D_{+\infty} = \ln\frac{2}{3}/\ln\frac{1}{2} \approx 0.585$$

其 D(q)谱如图6.3所示.

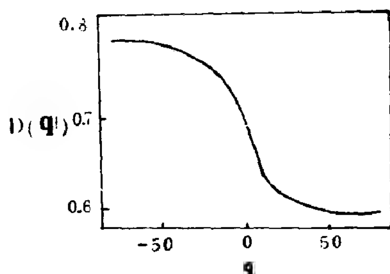


图6.3　D(q)谱

§4　多重分形的动态描述

D(q)和 f(α)描述了多重分形结构的几何特性.可看作一种静态描述.而多重分形常常是某一混沌动力系统的不变集,例如奇异吸引子.在其随时间演化的动态特性中,也存在着一个标度指数序列.因此,可用一套与静态谱相对应的语言来描述.

给定一动力系统,把它的相空间划分成尺寸为 l 的盒子,并将时间轴划分成尺寸为 τ 的小段. $\vec{x}(t)$是系统的一条轨道,$p(i_1,i_2,\cdots,i_n)$表示 $\vec{x}(\tau)$在盒子 i_1中,$\vec{x}(2\tau)$在盒子 i_2中…,$\vec{x}(n\tau)$在盒子 i_n 中的联合概率,q 阶广义熵(或 Renyi 熵)定义为

$$K_q=-\frac{1}{q-1}\lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\ln\sum_{(i_1\cdots i_n)}p(i_1,i_2,\cdots i_n)^q \qquad (q\neq 1)$$

当 q=0时

$$K_0=\lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty}\ln N(n)/n\tau$$

是拓扑熵.这里 N(n)是直到时刻 nτ 时需考虑的序列$\{i_1,\cdots,i_n\}$的数目.而在 q→1时,就得到由(5.94)定义的 Kolmoqorov 熵(第五章§5).

$$K=K_1=\lim_{q\to 1}K_q=-\lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{(i_1\cdots i_n)}p(i_1\cdots i_n)\ln p(i_1\cdots i_n)$$

它给出系统在单位时间信息的平均损失，且不依赖于 l. 由于 $K=K_1\geqslant K_2$，且 $K_2>0$是系统产生混沌的一个充分条件，所以，在实际应用中，常把 K_2作为 K_1的一个近似. 原因在于 Grassberger 和 Procaccia 提出了一种从时间序列计算 K_2的算法，它类似于 D_2的计算.

动态标度指数 Λ 定义为

$$p(i_1\cdots i_n)=\exp(-n\tau\Lambda)$$

不同的轨道可能具有相同的标度指数. 假定对于充分小的 l 和固定的 n，Λ 在区间$[\Lambda',\Lambda'+d\Lambda]$中取值的次数正比于 $\exp[n\tau g(\Lambda')]d\Lambda'$，类似于(6.17)和(6.18)，当 $n\to\infty$时，有

$$K_q=\frac{1}{q-1}[\Lambda q-g(\Lambda)] \tag{6.48}$$

$$\frac{\partial\tau(q)}{\partial q}=\Lambda \tag{6.49}$$

$$\frac{dg(\Lambda)}{d\Lambda}\Big|_{\Lambda(q)}=q \tag{6.50}$$

$$g(\Lambda)=\tau(q)-q\frac{\partial}{\partial q}\tau(q) \tag{6.51}$$

这里 $\tau(q)=(q-1)K_q$，这些公式是与质量指数 $\tau(q)$、标度指数 α 与广义维 D(q)间关系相类似的 Legendre 变换.

对于一维映射迭代 $x_{n+1}=f(x_n)$的瞬变混沌(traansient chaos)P. Szépfalusy 等人导出

$$\Lambda=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln|f'(x_j)|-\delta_n=\lambda_n-\delta_n$$

由此可以分析动态标度指数 Λ 的含意. 实际上，$\lambda_n=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln|f'(x_j)|$表示有限时间的Lyapunov指数，$\delta_n$称为逃逸率. 而 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$，$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$ 为系统的 Lyapunov 指数和逃逸率. 由于 $\lambda-\delta$

是围绕一排斥子运动的 Kolmogorov 熵，故 Λ 可以看成刻画 Kolmogorov 熵 K 涨落的一个量.

例6.3 我们再来分析第五章讨论过的帐蓬映射. 这里稍作了修改

$$f(x)=\begin{cases} x/p & 0\leqslant x\leqslant p \\ (1-x)/(1-p) & p\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

记 $\sum p(i_1\cdots i_n)^q=S_n^q$， 则

$$p(x_1)=\begin{cases} p & x_1\in[0,p] \\ 1-p & x_1\in[p,1] \end{cases}$$

$$S_1^q=p^q+(1-p)^q$$

$$p(x_1,x_2)=\begin{cases} p^2 & x_1,x_2\in[0,p] \\ p(1-p) & x_1\in[0,p],x_2\in[p,1] \\ (1-p)^2 & x_1,x_2\in[p,1] \end{cases}$$

$$S_2^q=[p^q+(1-p)^q]^2$$

运用归纳法

$$S_n^q=[p^q+(1-p)^q]^n$$

由此知道

$$K_q=-\frac{1}{q-1}\ln[p^q+(1-p)^q]$$

当 $q\to 1$ 时，可得到 Kolmogorov 熵

$$K_1=-p\ln p-(1-p)\ln(1-p)$$

从(6.49)计算出

$$\begin{aligned}\Lambda(q)&=\frac{\partial}{\partial q}(q-1)Kq\\&=-[p^q\ln p+(1-p)^q\ln(1-p)]/[p^q+(1-p)^q]\end{aligned}$$

令 $x=p^q/[p^q+(1-p)^q]$，则

$$\Lambda(x)=-[x\ln p+(1-x)\ln(1-p)] \tag{6.52}$$

运用(6.51)得到 $g(\Lambda)$

$$g(\Lambda(q))=(q-1)k_q-q\Lambda(q)=-\ln[p^q+(1-p)^q]$$
$$+[p^q\ln p^q+(1-p)^q\ln(1-p)^q]/[p^q+(1-p)^q]$$
$$=x\ln x+(1-x)\ln(1-x) \qquad (6.53)$$

可以观察到上述各式与二项倍增过程中的量 $\alpha(q)$,$D(q)$,$f(\alpha(q))$ 有完全相似的表示. 量 $\Lambda(q)$ 有一个非常简单的解释,它表示在前 n 次迭代中轨道访问$[0,p]$区间 r 次的 Lyapunov 指数. 事实上

$$e^{n\Lambda(y)}=\prod_j|f'(x_j)|=\left(\frac{1}{p}\right)^r\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-r}$$

由此推得 $\Lambda(y)=-[y\ln p+(1-y)\ln(1-p)]$

这里 $y=r/n$. 找到 $\Lambda(y)$的概率 $\hat{P}$ 等于在(长度为 n)的迭代序列中找到一个点有 r 次处于$[0,p]$中而 $n-r$ 次处于$[p,1]$中的概率.

即

$$\hat{P}=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

利用 Sterling 公式 $n!=\sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$,有 $n!\approx n^n$, 从而

$$\ln\hat{P}=n[y\ln(y/p)+(1-y)\ln((1-y)/(1-p))]$$
$$=n[y\ln y+(1-y)\ln(1-y)-\Lambda(y)]$$

比较(6.53)和上式,可以看到 $e^{ng(\Lambda)}$(除因子 e^{Λ} 外)等于在有限迭代序列中找到 Lyapunov 指数 λ 的概率 $\hat{P}(\lambda)$. 从变量 q 到变量 Λ 的 Legendre 变换给出了 $g(\Lambda)$的分布,它描述了长度 n 的时间序列(或 n 次迭代)中 Lyapunov 指数的涨落.

§5 多重分形的热力学

建立多重分形与统计热力学的类比,是多重分形的又一主题. 多重分形理论中把大尺度划分成许多小尺度的方法,同热力学中把系统划分成许多子系统的方法相似. 若将多重分形看作具有不

同标度 δ_i 的分形的集合，$\delta_i \leqslant \delta$，则(6.7)式可改写成

$$\mathscr{M}_{\delta}^{r}(q)=\sum p_i^q \delta_i^r$$

将它看作一种配分函数. 它同热力学中的配分函数一样，具有对系统的各个微观状态求和的含义. 由于热力学中所有的物理量都可以由配分函数导出，因此，对于多重分形也可以从适当定义的配分函数，由此引入熵、自由能等一套热力学语言. 它为全面地描述和分析多重分形的特征提供了新的途径.

值得注意的是，这种热力学描述是形式上的，它主要揭示形体的几何特征.

一. 熵函数与自由能函数

T. Bohr 和 D. Rand 首先引入拓朴熵 $S(\alpha)$，T·C·Halsey 等从配分函数 Γ 导出了熵函数 S. 1988年，M. Kohmoto 根据统计力学的形式类比，为多重分形引入了新的熵函数和自由能.

考虑一个多重分形系统. 假定在第 n 步，将分形分成 $N(n)$ 个小球，每个小球又可分成更小的球. 在第 $n+1$ 步时，有 $N(n+1)$ 个小球，它们构成一个分布. 第 n 步，直径为 δ_i 的小球的对数分布为

$$\varepsilon_i=-\ln\delta_i/n \tag{6.54}$$

式中 ε_i 是对应于 δ_i 的标度指数. 上式亦可写成 $\delta_i=\exp(-n\varepsilon_i)$. 当 n 变大时，$\delta_i\to0$ 但 ε_i 取非零有限值. 这里 ε_i 具有统计热力学中单粒子"能量"的含义，把标度指数在区间 $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ 之内的小球数记为 $\Omega(\varepsilon)d\varepsilon$，对应热力学中的玻耳兹曼关系，随 n 增大，有

$$\Omega(\varepsilon)=\exp[nS(\varepsilon)] \tag{6.55}$$

式中 $S(\varepsilon)$ 称为(每步的)熵函数. 分形集可用熵函数 $S(\varepsilon)$ 表征. 为计算 $S(\varepsilon)$，引入配分函数

$$Z(\beta)=\sum_{i=1}^{N(n)}\delta_i^{\beta}=\sum_{i=1}^{N(n)}\exp(-\beta n\varepsilon_i) \tag{6.56}$$

每步的自由能定义为

$$F(\beta)=\frac{1}{n}\ln Z(\beta)=\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{N}\exp(-\beta n\varepsilon_i) \tag{6.57}$$

将 $Z(\beta)$写成积分形式

$$Z(\beta)=\int\Omega(\varepsilon)\exp(-\beta n\varepsilon)d\varepsilon=\int\exp[n(S(\varepsilon)-\beta\varepsilon)]d\varepsilon \tag{6.58}$$

当 n 很大时，上述积分由 $S(\varepsilon)-\beta\varepsilon$ 的最大值支配，使其达到最大的 ε 的期望值记为 $E\varepsilon$，因此有

$$\beta=ds/d\varepsilon|_{\varepsilon}=E\varepsilon \tag{6.59}$$

$$F(\beta)\doteq S(E\varepsilon)-\beta E\varepsilon \tag{6.60}$$

可见，由熵函数 $S(\varepsilon)$可确定 β 和 $F(\beta)$，反之. 由 $F(\beta)$也可求出 $S(\varepsilon)$和 $E\varepsilon$，即

$$E\varepsilon=-dF(\beta)/d\beta=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\exp(-\beta n\varepsilon_i)/Z(\beta) \tag{6.61}$$

$$S(E\varepsilon)=F(\beta)-\beta\frac{dF(\beta)}{d\beta}=-\beta^2\frac{d}{d\beta}(F(\beta)/\beta) \tag{6.62}$$

上述换算实际上就是 Legendre 变换.

从自由能可以导出许多有意义的参量. 定义 β_c 是使 $F(\beta=\beta_c)=0$时的 β 值， 称作自由能的零点或临界值. 易知，$\beta_c=D_0$，而小球数

$$\Omega(E\varepsilon)_c=\exp[\beta_c nE\varepsilon]=(E\delta)_c^{-D_0} \tag{6.63}$$

其中$(E\varepsilon)_c$ 是 $\beta=\beta_c$ 时 $E\varepsilon$ 的值. 而$(E\delta)_c=\exp(-n(E\varepsilon)_c)$， D_0是集的分维. 另一有意义的量是逃逸率指数 δ. 其定义是，对充分大的 n

$$\sum_i\delta_i^d=\sum_i\exp(-n\varepsilon_i d)\sim\exp(-n\delta) \tag{6.64}$$

这里 d 是分形的嵌入空间维数. 由(6.56)知

$$\delta=-F(d) \tag{6.65}$$

综上可知，熵函数 $S(\varepsilon)$和自由能函数 $F(\beta)$充分刻画了分形的几何性质.

例6.3 三分康托集，$F(\beta)=\ln2-\beta\ \ln3$，熵函数

$$S(\varepsilon)=\begin{cases}\ln 2 & \varepsilon=\ln 3\\ 0 & 其它\ \varepsilon\end{cases}$$

由此知

$$D_0=\beta_c=\ln 2/\ln 3=D_H$$

$$\delta=\ln(2/3)$$

上面讨论的是确定性分形，下面将其扩充到更一般的情形.

二. 多重分形测度的热力学形式类比

假设在分形的第 n 步划分中，第 i 个小球具有测度 p_i，概率分布满足

$$p_i=\delta_i^{\alpha_i} \tag{6.66}$$

且仍有 $\delta_i=\exp(-n\varepsilon_i)$，因此必须考虑两个标度指数的分布，标度指数位于$[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$和$[\alpha,\alpha+d\alpha]$内的小球数记为 $\Omega(\varepsilon,\alpha)d\varepsilon d\alpha$，则对充分大的 n，有

$$\Omega(\varepsilon,\alpha)=\exp[nQ(\varepsilon,\alpha)] \tag{6.67}$$

这里 $\Omega(\varepsilon,\alpha)$称为广义熵函数. 广义配分函数定义为

$$\Gamma(q,\beta)=\sum_i p_i{}^q\delta_i{}^\beta=\sum_i\exp[-n\varepsilon_i(\alpha_i q+\beta)] \tag{6.68}$$

广义自由能定义为

$$G(q,\beta)=\frac{1}{n}\ln\Gamma(q,\beta) \tag{6.69}$$

显然， 前面定义的 $Z(\beta)$和 $F(\beta)$是这里 $q=0$的特例，即 $Z(\beta)=\Gamma(0,\beta)$，$F(\beta)=G(0,\beta)$. 由 K_q 的定义可见，$G(q,0)=(1-q)Kq=\Lambda q-q(\Lambda)$，即$(1-q)Kq$ 谱也是 $G(q,\beta)$的特例.

将 $F(q,\beta)$写成积分形式

$$\Gamma(q,\beta)=\iint\exp\{n[Q(\varepsilon,\alpha)-(\alpha\cdot q+\beta)\varepsilon]\}d\alpha d\varepsilon \tag{6.70}$$

同样积分由指数的最大值支配，得到

$$G(q,\beta)=Q(E\varepsilon,E\alpha)-((E\alpha)q+\beta)E\varepsilon \tag{6.71}$$

$E\varepsilon$ 和 $E\alpha$ 给出了 $Q(\varepsilon,\alpha)-(\alpha q+\beta)\varepsilon$ 的最大值. 由此得

$$\left.\frac{\partial Q(\varepsilon,\alpha)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{\varepsilon=E\varepsilon\\ \alpha=E\alpha}}=E\alpha q+\beta \tag{6.72}$$

$$\left.\frac{\partial Q(\varepsilon,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\substack{\alpha=E\alpha\\ \varepsilon=E\varepsilon}}=E\varepsilon q \tag{6.73}$$

于是，从 $Q(\varepsilon,\alpha)$ 可求出 $G(q,\beta)$. 反之，只要知道 $G(q,\beta)$，就可求出 $E\varepsilon$、$E\alpha$ 和 $Q(E\varepsilon,E\alpha)$. 即

$$E\varepsilon=-\partial G(q,\beta)/\partial\beta \tag{6.74}$$

$$(E\varepsilon)(E\alpha)=-\partial G(q\cdot\beta)/\partial q \tag{6.75}$$

$$Q(E\varepsilon,E\alpha)=G(q,\beta)-q\partial G(q,\beta)/\partial q-\beta\partial G(q,\beta)/\partial\beta \tag{6.76}$$

$$\text{令}\quad G(q,\beta_c(q))=0 \tag{6.77}$$

由(6.69)知

$$\Gamma(q,\beta_c(q))=\sum_i p_i^q\delta_i^{\beta_c(q)}=1 \tag{6.78}$$

多重分形的配分函数还可写成 $\Gamma(q,\tau,\delta)=\sum_i p_i^q\delta_i^\tau$.

这样，从(6.68)、(6.78)、(6.13)和(6.17)可以得到

$$\beta_c(q)=\tau(q)=(1-q)D(q)=f(\alpha)-\alpha q \tag{6.79}$$

即通过自由能可以得到 $D(q)$ 和 $\tau(q)$.

在临界值 $\beta=\beta_c$，由(6.71)，(6.72)和(6.77)，计算可得

$$Q((E\varepsilon)_c,(E\alpha)_c)=\partial Q(\varepsilon(E\alpha)_c)/\partial\varepsilon|_\varepsilon=(E\varepsilon)_c\cdot(E\varepsilon)_c \tag{6.80}$$

$$f((E\alpha)_c)=\left.\frac{\partial Q(\varepsilon,(E\alpha)_c)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=(E\varepsilon)_c}=(E\alpha)_c q+\beta_c(q) \tag{6.81}$$

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_c}=q \tag{6.82}$$

$$(E\alpha)_c=-d\beta_c(q)/dq \tag{6.83}$$

将上述各式与(6.13)，(6.17)进行比较，可知这里的 $f(\alpha)$ 是多重分形的奇异谱函数.

从上述讨论可以看到，广义熵函数和广义自由能函数包含着非常丰富的信息，尤其是广义自由能 $G(q,\beta)$ 具有热力学中特征函

数的作用.这种热力学形式为多重分形的表征提供了新的工具.

例6.4 对于尺寸均匀的球构成的配分,即 δ_i 为常数 δ 时

$$N(q,\delta)=\sum_i p_i^q=\Gamma(q,0)\sim\delta^{-\beta_c(q)}$$

而广义维数和 $f(\alpha)$ 谱满足

$$D(q)=\frac{1}{q-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\Gamma(q,0)}{\ln\delta}=\beta_c(q)/(1-q) \tag{6.84}$$

$$\Omega(\varepsilon,\alpha)=\exp(n\varepsilon f(\alpha))=\delta^{-f(\alpha)}$$

当 p_i 为常数,即假定每个小球上测度相等时,不存在 p_i 分布.假定每次每个小球都被划分成相等数目的新球,即 $N(n)=a^n$,a 为一个小球划分成更小的小球数目,则

$$p=1/(N(n)=1/a^n$$

这时广义自由能与自由能有关系

$$G(q,\beta)=-q\ln a+F(\beta) \tag{6.85}$$

从上式和(6.74)可得

$$E\varepsilon=-\partial F(\beta)/\partial\beta$$

它不依赖于 q. 由(6.75)和(6.77)得到

$$E\alpha=\ln a/E\varepsilon$$

结合(6.71)可以证明

$$Q(\varepsilon,\alpha)=S(\varepsilon)=\varepsilon f(\alpha)$$

这里考虑了关系$(E\alpha)(E\varepsilon)=\ln a$. 在临界点 $\beta=\beta_c(q)$,由(6.85)

$$q\ln a=F(\beta_c)$$

三.与 Lyapunov 指数相关联的热力学

在第四章,我们讨论了递归集,分形可以通过递归集构造.同样的道理,一个多重分形也可以通过两个或两个以上的长度标度递归构造.在一个混沌映射中,Lyapunov 指数的变更产生一个多标度的分形.下面讨论与 Lyapunov 指数相关的热力学形式体系.

假设在分形的第 n 次划分时，存在尺寸分别为 $\delta_i^{(n)}$，$i=1,2,\cdots$ 的 $N(n)$ 个单元. 与前面类似地建立配分函数 $Z(\beta)$ 和 $F(\beta)$

$$Z(\beta)=\exp(nF(\beta))=\sum_i \delta_i^{(n)\beta}=\sum_i \exp(\beta\ln\delta_i^{(n)})$$

$$=\sum_i \exp(-n\beta\varepsilon_i) \tag{6.86}$$

这里 $n\varepsilon_i=-\ln\delta_i^{(n)}$ 等同于一个自旋系统的能量； $\beta=-\tau$ 等同于逆温度. 若每一次划分的增长率为 μ， 则 $N(n)=\mu^n$ 或 $N^{q(\tau)}(n+1)/N(n)^{q(\tau)}=\mu^{q(\tau)}$. 故 $F(q)=q(\tau)\ln\mu$，是正比于 Gibbs 磁势的一个相应的热力学势. 与(6.55)相对应，一给定初始条件的每步迭代的熵函数可定义为

$$S=\ln N(n)/n \tag{6.87}$$

并且有

$$S(E\varepsilon)=F(\beta)+(E\varepsilon)\beta \tag{6.88}$$

对一个混沌动力系统，Lyapunov 指数是刻画轨道不稳定性特性的一个重要参数. 对于任一混沌映射所产生的分划 $\{\delta_i^{(n)}\}$，$\delta_i^{(n)}=\exp(-n\lambda_i)$，这里 λ_i 是相应于一个混沌映射 f 沿初始位置 x_i 的一条轨道的时间平均 Lyapunov 指数

$$\lambda_i=\ln|df^n(x_i)/dt|/n \tag{6.89}$$

这样，配分函数可写作

$$Z_n(\beta)=\sum_{i=1}^{N}\exp(-n\beta\lambda_i)=\sum_i^{N}\exp\left(-\beta\ln\left|\frac{df^n(x_i)}{dt}\right|\right) \tag{6.90}$$

与(6.86)比较，这里 λ_i 具有一个“粒子”(或“单自旋”)能级的作用. 从而(6.88)可以改写成

$$S(E\lambda)=F(\beta)+(E\lambda)\beta$$

式中 $E\lambda$ 为 Lyapunov 指数的平均值. 这也相当于一个 Legendre 变换. 在单标度情形下，$S(\lambda)/\lambda=D(\lambda)$就是集合的分维.

一个一维的混沌映射一定具有多值的逆映射，这是理解配分函数(6.90)式的关键. 为简单起见，我们考虑一个具有双值逆的映

射. 这时，从任意一个终态 $x_n=f(x_{n-1})$ 开始作逆向迭代. $x_{n-1}=f^{-1}(x_n)$ 具有两个值，$x_{n-2}=f^{-1}(x_{n-1})$ 导致4个值等等，直到最后回到 $N(n)=2^n$ 个初始条件 $\{x_i\}$. 从这 2^n 个不同的 $\{x_i\}$ 出发，正向迭代时虽经过不同的轨道，但都会到达相同的终态 x_n. 这些不同的轨道相应的Lyapunov 指数是(6.90)中的 λ_i. 即通过正反两个方向的迭代将导致分形吸引子或排斥子结构(如第五章§4，§6所述).

上述热力学形式可用来刻画一个产生非均匀康托集的混沌动力系统. 例如 反对称帐蓬映射

$$f(x)=\begin{cases}ax & x<b/(a+b)\\ b(1-x) & x>b/(a+b)\end{cases}$$

当 $ab>(a+b)>0$ 时，几乎所有的迭代都向无穷大方向逃逸. 当 $ab=a+b$ 时，不变集的分维为1. 直接计算可知，f 的不变集是一个双标度康托集，其它点的迭代发散. 如取 $1/a<x_0<1-1/b$ 时，$x_1>1$，以至 $E\delta_1=1/a$，$E\delta_2=1/b$，这样不变集必位于闭区间 $[0,\frac{1}{a}]$ 和 $[1-\frac{1}{b},1]$ 中. 第二次迭代时，不趋于无穷的点必位于4个闭区间内，其长度是 $(E\delta_1)^2$，$E\delta_1\cdot E\delta_2$，$E\delta_2\cdot E\delta_1$ 和 $(E\delta_2)^2$. 若按(6.90)定义配分函数，使 $F(\beta)/\beta$ 是 Gibbs 磁势，则可从(6.90)导出一个单自旋配分函数的幂律关系

$$Z=\exp(-\beta\ln a)+\exp(-\beta\ln b)=a^{-\beta}+b^{-\beta} \tag{6.91}$$

它对应一个处于外场 $H=\frac{1}{2}\ln(b/a)=(\lambda_2-\lambda_1)/2$ 中的理想顺磁体，其磁化强度

$$M=\tanh(\frac{1}{2}\beta\ln(b/a))$$

由此可见，双标度Cantor集的动力学等价于一个具有自旋态 $\varepsilon_1=\varepsilon_0+\ln a$ 和 $\varepsilon_2=\varepsilon_0+\ln b$ 的理想顺磁体，这里 $\varepsilon_0=\ln(b/a)/2$.

$Ep_i=\exp(-\beta\epsilon_i)/z$ 是发现系统处于自旋能 ϵ_i 的概率，而 Lyapunov 指数的平均值 $E\lambda$ 就是平均自旋能 $E\epsilon$

$$E\lambda=-\frac{d}{d\beta}F(\beta)=Ep_1\ln a+Ep_2\ln b$$

其中 $\lambda_1=\ln a=\lambda_{max}$， $\lambda_2=\ln b=\lambda_{min}$ $a>b$

从标准的热力学关系

$$E(\triangle\lambda_2)=-\frac{\partial}{\partial\beta}(E\lambda)$$

可以得到 Lyapunov 指数的涨落

$$E(\triangle\lambda^2)=Ep_1Ep_2(\ln a-\ln b)^2$$

由此可见，对局部非均匀标度 $a^{-n_1}b^{-n+n_1}$，Lyapunov 指数的变更产生一个非均匀分形.

由(6.91)可以求得熵

$$ES(\beta)=-Ep_1\ln(Ep_1)-Ep_2\ln(Ep_2)$$

它描述其 Lyapunov 指数涨落～±$E(\triangle\lambda^2)$的自旋构型的无序度. 为了更好地理解这一结果，我们可建立映射 f 的符号动力学. 令 n 表示 f 的迭代次数，n_1表示使 $\left|\frac{df}{dt}\right|=a$ 的次数，则 $n_2=n-n_1$是 $\left|\frac{df}{dt}\right|=b$ 的次数. 字母 L 表示 $\left|\frac{df}{dt}\right|=a$ 的情形，R 表示 $\left|\frac{df}{dt}\right|=b$ 的情形. 此时映射 f 的迭代可用含两个字母的符号动力系统来描述. 对 $n\to\infty$，限制于一定初始条件的动力系统产生一个无限长的词. 如 LRRLLLR…，而不同的初始条件导致不同的词. 因为平均自旋能 $E\lambda$ 仅依赖于渐近比率 n_1/n_2，而与词中字母顺序无关. 因此，对于 β 的一个单值，$n\to\infty$时一般存在无穷多个对 $E\lambda$ 和 $ES(\beta)$有贡献的词，每个词都等效于一个一维自旋构型(L 是“自旋向上”，R 是“自旋向下”). 将 Lyapunov 指数定义为在所有相同字符(不考虑次序)分布的符号序列上的平均，此时熵 $ES(\beta)$反映了由此而产生的不同格点构型的“无序度”. 温度 β 是系统的控制参量，它选

出具有限定字符比率的格点构型.

对于非均匀概率分布的一般情形,从(6.74)可以进行类似的处理,并可得到 $f(\alpha)$ 谱与热力学表述 $S(\lambda)$ 之间更一般的关系

$$\alpha(\lambda)=\beta+F(\beta)/\lambda=[E(S(E\lambda))+E(S'(E\lambda))\delta\lambda]/\lambda$$

$$f(\alpha(\lambda))=D(\lambda)=S(\lambda)/\lambda$$

此处 $\beta=E(S'(\lambda))$, $E\lambda=-F'(\beta)$, $\delta\lambda=\lambda-E\lambda$

使用自由能等量的其它定义,亦可建立相应的热力学,并且在一定情形下,可以证明它们是等价的.

§6 多重分形在热力学形式上的相变

多重分形在热力学形式上的"相变",是目前分形理论研究的"热点"之一,也是分形理论应用中迫切需要解决的问题之一.

分形热力学中的相变,是指系统发展到一定程度后,$\tau(q)$ 和 $f(\alpha)$ 等主要参量不再收敛.此时对应于一个临界值 q_c,相当于热力学中的临界温度.相变研究的任务之一就是求出这一临界值.

一.静态相变和动态相变

静态相变指多重分形谱 $D(q)$ 和 $f(\alpha)$ 表现出的非解析性行为.类似地,动态相变指广义熵 K_q 和 $g(\Lambda)$ 谱的非解析性态.在混沌动力系统中,这两类相变可同时共存.

例6.5 一维连续动力系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x)$$

这里 $f(x)$ 是一个单峰混沌函数,如图6.4所示.

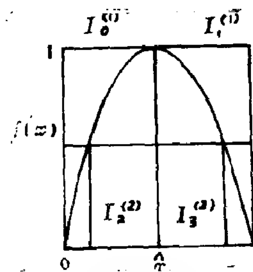


图6.4 混沌单峰映射

吸引子被两点对一点地从[0,1]映到自身. $f(0)=f(1)=0$ 且 $f_{max}=f(\hat{x})=1$. $\hat{x}$ 把吸引子分在两个区域 $I_0^{(1)}$ 和 $I_1^{(1)}$ 中. $I_0^{(1)}=[0,\hat{x})$, $I_1^{(0)}=[\hat{x},1]$. 将此二分法加以细化,即把每次迭代的像作为后继的前像. 第 n 次产生的区间集为 $I_i^{(n)}$, $i=0,1,\cdots,2^n-1$,它完全覆盖了吸引子. 用 $\mu(I_i^{(n)})$ 表示区间集 $I_i^{(n)}$ 的自然测度,即吸引子上随机选取的点落入 $I_i^{(n)}$ 的概率,可以定义配分函数

$$Z_{\mu,n}(\beta)=\sum_i[\mu(I_i^{(n)})]^\beta \tag{6.92}$$

此处 $\beta\in(-\infty,+\infty)$ 是一个具有"逆温度"含义的参数,当 n 充分大时,定义自由能密度 $F\mu(\beta)$

$$\beta F_\mu(\beta)=-\frac{1}{n}\ln Z_{\mu,n}(\beta) \tag{6.93}$$

其广义熵 $K(q)$ 可表为

$$\begin{cases}K(q)=-\dfrac{1}{q-1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\sum_i[\mu(I_i^{(n)})]^q & q\neq 1\\ K(1)=-\lim\dfrac{1}{n}\sum\limits_i\mu(I_i^{(n)})\ln\mu(I_i^{(n)}) & q=1\end{cases} \tag{6.94}$$

从上述三式可求得 $F_\mu(\beta)$ 与 $K(q)$ 的关系

$$K(q)=qF\mu(q)/(q-1) \qquad q\neq 1$$

当 $n\gg 1$ 时,记 $\mu(I_i^{(n)})=e^{-n\Lambda}$,这样 $\Lambda=-\dfrac{1}{n}\ln\mu(I_i^{(n)})$

为动态标度指数,动态谱 $g(\Lambda)$ 是有相同 Λ 的轨道的拓扑熵.

$n\to\infty$ 时

$$\beta F\mu(\beta)=(\beta-1)K_q=\beta\Lambda(\beta)-g(\Lambda(\beta)) \tag{6.95}$$

式中 $\Lambda(\beta)$ 可由 $dg/d\Lambda|_{\Lambda(\beta)}=\beta$ 求出,它意味着 Λ 和 $g(\Lambda)$ 可分别看作能量和熵函数. 此时多重分形谱 $g(\Lambda)$ 具有重要热力学意义

$$g(\Lambda)=S(\varepsilon)|_{\varepsilon=\Lambda} \tag{6.96}$$

现在应用上述一般理论来分析定义于(0,1)区间上的临界映

射.这类映射以原点为间断点,$f'(0)=1$.这一边缘稳定点,在动力系统中存在临界慢化现象.一个特殊例子如下

$$f(x)=1-|x^r-(1-x)^r|^{1/r} \qquad r>1 \tag{6.97}$$

$r=2$时,它是参数为1的分段抛物映射.求得(6.97)的不变概率密度为

$$p(r,x)=r(1-x)^{r-1} \tag{6.98}$$

它在$x=1$处有一个r阶奇点,可以求得

$$D(q)=\min\{q-1,rq\}/(q-1)$$
$$=\begin{cases}1 & r>q_c \quad (q_c=1/(1-r)) \\ rq/(q-1) & r<q_c\end{cases}$$

$q-D(q)$曲线如图6.5所示.它在$q=q0$处产生相变,这是与静态特性相联系的相变.另外,Katzen 和 Procaccia 等求得,对于$f(x)=4x(1-x)$,$x\in[0,1]$的不变测度$\rho(x)=\pi^{-1}[x(1-x)]^{-1/2}$存在如下相变

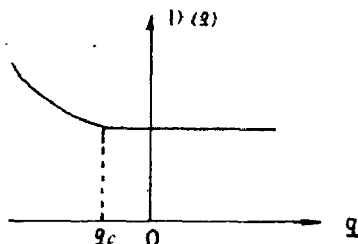


图6.5 D(q)谱在$q=q_c$处的非解析

$$D(q)=\begin{cases}1 & q<q_c \quad (q_c=2) \\ q/[2(q-1)] & q>q_c\end{cases} \tag{6.99}$$

$f_c(z)=z^2+0.25$的 Julia 集在$q=0$时发生相变.

现在讨论动态套相变.记

$$L_n(q)=\frac{1}{1-q}\frac{1}{n}\ln\sum_i[\mu(I_i^{(n)})]^q$$

则$K(q)=\lim\limits_{n\to\infty}L_n(q)$.广义熵$K(q)$的截尾熵$K_n(q)$定义为

$$K_n(q)=(n+1)L_{n+1}(q)-nL_n(q)$$

对混沌单峰映射(如图6.4),Szépfalusy 等人运用渐近分析方法求得,对充分大的 n,

$\triangle K_n(q)=K_n(q)-K(1)\geqslant n^{-s}$

式中 $s>0$，对映射(6.97)，上式中的指数 s 为

$$s=\begin{cases}(2r-1)/(r-1) & r<3\\ 1+r/2 & r>3\end{cases}$$

所以 $K_n(q)\geqslant K(1)\geqslant 0$. 另一方面，在 f 的吸引子的二分细化中，设 $I_l^{(n)}$ 表示最左边的区间，由于 $\sum_l[\mu(I_l^{(n)})]^q$ 仅含正项，当 $q>1$时，只保留求和中最左边区间的贡献，则得到 $L_n(q)$的上界

$$L_n(q)\leqslant\frac{1}{1-q}\frac{1}{n}\ln[\mu(I_l^{(n)})]^q \qquad q>1 \tag{6.100}$$

结合上述两方面分析知，所以当 $q>1$时，$K(q)=0$. 由于单峰混沌映射在临界情形仍有一个绝对连续的测度，因此 Kolmogrov 熵 $K(1)>0$，在(6.97)中，$r=2$时，Gyorgyi 等人求得 $K(1)=\frac{1}{2}$.

Csordás 等人通过渐近分析得到

$$\begin{cases}L_n(q)\sim K(q)+[A(q)+B(q)\delta^n(q)]/n & q\neq 0\\ L_n(0)=\ln 2 & q=0\end{cases}$$

式中 $A(q)$,$B(q)$,$\delta(q)$可通过数值方法从 $L_{11}(q)$,…,$L_{14}(q)$求出. 结果表明，当$q\in(-\infty,1]$时，$K(q)$单调递减且是连续的，又 $K(1)=1/2$，$q>1$时，$K(q)=0$. 因此，$K(q)$在 $q_c=1$处不连续. 如图6.6所示(见下页). 图中显示了(6.97)中，$r=2$时，$K(q)$随 q 的变化规律，说明了比指数衰减慢的熵衰减过程.

上面分析说明，$K(q)$在$q=1$时有一相变. 当$\beta\to 1_{-0}$时，$\beta F_\mu(\beta)\sim(\beta-1)K(1)$且对 $\beta\geqslant 1$，$F\mu(\beta)=0$. 由变换式(6.95)可以看到$\Lambda(\beta=1)$可取 $K(1)$和0之间任何值，此时 $g(\Lambda)=\Lambda$，$0\leqslant\Lambda\leqslant K_1$. 如图6.7所示，曲线 $g(\Lambda)=\Lambda$ 与具有一阶导数的单峰曲线

相联结，在$\Lambda=K(1)$处发生相变. 用热力学语言叙述，即在$\beta=1$时，内能$\varepsilon(\beta)$从$K(1)$跃变到0.

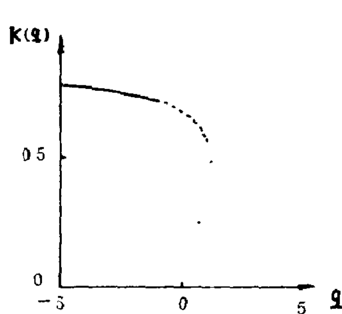


图6.6 映射(6.97)中 r=2时的 K(q)谱

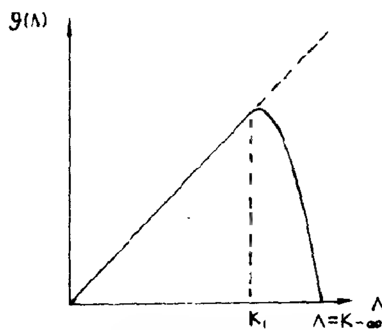


图6.7 临界映射的 g(Λ)谱

上述例子表明，在混沌动力系统中，静态相变与动态相变可以共存. 但是这两类相变有明显差别，前者的临界值q_c依赖参数 r，而后者与参数 r 无关，总是发生在$\beta=1$处.

二. 一级相变与二级相变

在以前各节中，我们实际上假定了对$q\in(-\infty,+\infty)$配分函数在$\delta\to0$时，有标度律$\sum_i p_i^q\simeq A(q)\delta^{\tau(q)}$. 由此我们分析了(6.97)的相变点$q_c=1/(1-r)$. 相应于$q>q_c$和$q<q_c$的两相都由有限非零 D(q)值刻画，这类相变可称作二级(*second－rank*)相变. 但是，对有些系统，它服从其它类型的非幂律标度形式，比如

$$\sum_i p_i^q\sim B(q)(\ln 1/l)^{-\delta(q)} \tag{6.101}$$

$$\sum_i p_i^q\sim B(q)C(q)^{-l^{-\delta(q)}} \tag{6.102}$$

这里l是标度，$B(q)$，$C(q)$，$\delta(q)$是 q－相关常数.

若(6.101)成立，只要至少存在一个盒子，其上的概率P_s，比任何作为盒子尺度函数的幂律都慢地衰减到0，例如

$$p_s>1/(\ln 1/2)^{\delta}\qquad \delta>0 \tag{6.103}$$

则对 $q>1$，可以得到 $D(q)$ 的一个上界

$$0\leqslant D(q)\leqslant\lim_{l\to 0}\frac{q}{1-q}\ln p_s/\ln 1/l\leqslant\lim_{l\to 0}\frac{q\delta}{l-q}\cdot\frac{\ln\ln 1/l}{\ln 1/l}=0$$

即是说，如果有一些盒子上的概率测度衰减比幂律慢，则对 $q>1$，$D(q)$ 为0，其配分函数满足标度律(6.101)．这时，对 $q>1$，$f(\alpha(q))=\alpha(q)=0$．而对 $q=1$，$\alpha(1)=f(\alpha(1))$ 取 $[0,D(1)]$ 之间的任何值．于是在 $q_c=1$ 处的相变给出一条直线

$$f(\alpha)=\alpha \qquad \alpha\in[0,D_1] \tag{6.104}$$

它表明只有小于1的 q 值才对 $f(\alpha)$ 的保留部分有贡献．

相似地，若至少存在一个盒子，其上概率测度 P_f 比任何幂律都快地衰减到零，则对 $q<0$，配分函数由这些反常快衰减的盒子概率所支配．如存在一个盒子，其概率

$$p_f<C^{-1/l^{\delta}} \qquad C>1 \quad \delta>0 \tag{6.105}$$

则可对 $q<0$ 估计 $D(q)$ 的下界

$$D(q)\geqslant\lim_{l\to 0}\frac{q}{1-q}\ln p_f/\ln 1/l\geqslant\lim_{l\to 0}\frac{-q}{1-q}\frac{\ln C}{l^{\delta}\ln 1/l}=\infty \tag{6.106}$$

这时，$f(\alpha)$ 谱也具有奇异性．由于 $f(\alpha)\leqslant\alpha$，故当 $q<1$ 时可推出

$$\alpha(q)\geqslant D(q) \tag{6.107}$$

将此式与(6.106)比较得

$$\infty=D(q)\leqslant\alpha(q) \qquad q<0$$

这表明负 q 值对 $f(\alpha)$ 无贡献，$f(\alpha)$ 谱仅包含单调增加的那一部分．在(6.105)的情形，配分标度由(6.102)决定．通常(6.101)与(6.102)两种反常标度形式只限于 $q\in[-\infty,\infty]$ 的一个子集，它们反映了反常相．在这些相中 $D(q)$ 取0或∞．当趋近这些相的边界点 q_c 时发生相变．与前述二级相变对照，这类相变称作一级(first－rank)相变．

例6.6 考虑一维映射

$$f(x)=\exp\left\{-\frac{|\ln x-\ln(1-x)|}{(1-\ln x)[1-\ln(1-x)]-|\ln x-\ln(1-x)|}\right\}$$
(6.108)

的迭代产生的混沌动力系统. 它在支集[0,1]上具有不变测度

$$\mu(x)=1/(1-\ln x) \qquad x\in[0,1] \tag{6.109}$$

反常标度出现在最左边的盒子中,这里

$$P_s\sim 1/\ln 1/l \qquad l\to 0 \tag{6.110}$$

它对应(6.103)中 $\delta=1$的情形,直接计算可知,$q_c=1$时产生一级相变,事实上

$$D(q)=\begin{cases}0 & q>1\\ 1 & q<1\end{cases}$$

由 Legendre 变换得出 $f(\alpha)$谱

$$f(\alpha)=\alpha \qquad \alpha\in[0,1]$$

在 $D(q)$中的正常相和反常相,即对应 $q<1$和 $q>1$的情形,分别导致 $f(\alpha)$的不同值

$$f(\alpha(q))=\alpha(q)=\begin{cases}1 & q<1\\ 0 & q>1\end{cases}$$

即从 $\alpha=0$到 $\alpha=1$之间的线段来自 $q_c=1$处的一级相变.

例6.7 考虑一维映射

$$f(x)=\frac{1}{1-\ln(1-|e^{1-1/x}-e^{1-1/(1-x)}|)} \tag{6.111}$$

的动力系统. 它在支集[0,x]上具有不变测度

$$\mu(x)=e^{1-1/x} \qquad x\in[0,1] \tag{6.112}$$

反常标度也出现在最左边的盒子中

$$p_f=e^{1-1/l} \tag{6.113}$$

经计算可知

$$D(q)=\begin{cases}\infty & q<0\\ 1 & q>0\end{cases}$$

$f(\alpha)$谱也有相应奇异行为

$f(\alpha)=1 \qquad \alpha\in[1,\infty)$

由于当 $q<0$时，$\alpha(q)=\infty$，因此负 q 值对 $f(\alpha)$无贡献．由上可知，正常相导出 $f(\alpha(q>0))=\alpha(q>0)=1$．从 $\alpha=1$到 $\alpha=\infty$的水平线来自 $q_c=0$处 $D(q)$的一级相变．

前面，讨论的相变，其动力系统的不变测度只涉及单个盒子．现在考虑测度涉及一个盒子序列的动力系统．它往往与系统的时间演化有关．设$\{x_t|1,2,\cdots,n\}$是信号 x_t 的一个时间序列，把它的相空间划分成 m 个盒子，编号为$0,1,\cdots,m-1$．我们只考虑被轨道访问的盒子．符号序列 $O_n=(i_1,i_2,\cdots,i_n)(i_j=0,1,\cdots,m-1;j=1,2,\cdots,n)$给出了轨道的特征．其中 i_j 是被访问的盒子，$i_1,\cdots,i_n$ 是时间抽样子序列．若混沌吸引子上存在一个稳定分布，则序列 O_n 构成一个平稳过程．$p(O_n)$表示一给定序列出现的概率，它可从不变分布求出．当系统从一种状态转变到新的状态时，符号序列的概率可表成

$$p(i_1,\cdots,i_n)=\sum_{i_{n+1}=0}^{m-1}p(i_1,\cdots,i_n,i_{n+1})$$

这类系统的动态可在 Farmer 定义的所谓历史空间(history space)中讨论．

定义 q 阶信息量

$$\begin{cases}I_n(q)=\dfrac{1}{1-q}\ln\sum\limits_{O_n}(p(O_n))^q & q\neq 1\\ I_n(1)=-\sum\limits_{O_n}p(O_n)\ln p(O_n) & q=1\end{cases}$$

则广义熵可表成

$$K(q)=\lim_{n\to\infty}I_n(q)/n=\lim_{n\to\infty}[I_n(q)/n\ln m]\ln m$$

在动态相变的分析中，我们假定 $K(q)$非零有限，它等价于对于充分大的 n，配分函数具有标度性质

$$\sum_{(i_1\cdots i_n)}[P(i_1,\cdots,i_n)]^q \sim A(q)\lambda^n(q) \tag{6.114}$$

对大n， 式中q－相关量λ(q)满足：当q＜1时，1＜λ(q)＜∞；当q＞1时，0＜λ(q)＜1. 对某些混沌动力系统，与静态相变类似，这种标度假定并不能在q的整个区域内成立. 一般，也有两种反常标度. 假定至少存在一个符号序列$\widetilde{O}_n$，其概率测度有慢于指数的衰减，而

$$p(\widetilde{O})\geqslant An^{-s} \tag{6.115}$$

其中A＞0，s＞0，当q＞1时，K(q)有一上界

$$K(q)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{q}{1-q}\frac{1}{n}\ln p(\widetilde{O}_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{q}{1-q}\frac{1}{n}(\ln A-s\ln\ n)=0$$

因此，对q＞1，K(q)＝0. 由于系统是混沌的，故K(1)＞0. 因K(q)有单调减性质，由此知，$q_c=1$时，K(q)发生相变. Kaufman等人发现，参数σ＝3.929，ρ＝16.49，r＝1.032的洛伦兹系统（第五章§4）也有这类相变.

类似地，若至少存在一个符号序列$\tilde{O}_n$，其概率测度$p(\tilde{O}_n)$衰减比指数型还快，例如

$$p(\widetilde{O}_n)\leqslant B^{-c^n} \tag{6.116}$$

式中B＞1，c＞1.，当q＜0时，配分和中只保留序列$\tilde{O}_n$的一项，得到K(q)的一个下界

$$K(q)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}\frac{1}{n}\ln p(\tilde{O}_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{q}{q-1}\frac{c^n}{n}\ln B=\infty \tag{6.117}$$

但拓扑熵K(0)≤lnm，m为划分单元数目. 而对q＞0，K(q)为有限正值. 这样，在q＝0处，出现了一个跃向无穷大的相变. 历史空间中这两种在K(q)谱中显示出零值和无穷大的相变也称为一级相变.

三. 从双变量热力学的特征值导出的相变

对于一个多重分形分布，可从长度标度和测度的单峰函数

$f(x)$,$g(y)$出发引出双变量迭代函数系统(第五章§9). 将这一过程的最大特征值和 Gibbs 磁势联系起来，导出维数、熵和 Lyapunov 指数，可建立相变研究的一个新方法.

前面我们已说明，单峰函数 $f(x)$ 的不变集是类康托集，这一分形的自由能可用特征问题作更深入的研究. 考虑下述广义 Frobenius—Perron 方程

$$\lambda(\beta)Q_{n+1}(x)=\sum_{\epsilon=0,1}\frac{Q_n(f_\epsilon^{-1}(x))}{|f'(f_\epsilon^{-1}(x))|^\beta} \tag{6.118}$$

式中 $\epsilon=0,1$ 表示反函数 f^{-1} 的两个分支. 从任一正的初始光滑函数 $Q_0(x)$ 开始迭代，当 $n\to\infty$ 时，对每一 β 存在唯一的 $\lambda(\beta)$，称作最大特征值，使迭代收敛于有限的极限函数 $Q(x)$. $Q(x)$ 称为 $\lambda(\beta)$ 对应的特征函数. 可以证明

$$\lambda(\beta)=\exp(-\beta F(\beta)) \tag{6.119}$$

即自由能可以从特征值得到.

上节的讨论说明， Gibbs 磁势 $G(\beta,q)$ 可从配分函数得到，实际上， 它也容易与特征值的形式类比结合起来. 考虑由前述 $f(x)$ 产生的分形支集. 在 $(0,1)$ 上取另一函数 $g(y)$，如图6.8. 与例6.5同样的方法，可定义一个区间集. 在第 n 步，将这些区间的尺度看作同一步 $f(x)$ 的长度标度的测度，f 和 g 分别称为长度标度映射和测度映射. 为使 f 和 g 建立一一对应，两集采用相同符号编码，考虑到测度归一化，取 g 为闭映射. g 的支集为不变集且支集的前象覆盖整个 $(0,1)$ 区间. 从而归一化自动保持. 这一迭代方案可以表示成双变量 Frobenius—Perron 方程

$$\lambda(\beta,q)Q_{n+1}(x,y)=\sum_{\epsilon=0,1}\frac{Q_n(f_\epsilon^{-1}(x),g_\epsilon^{-1}(y))}{|f'(f_\epsilon^{-1}(x)|^\beta|g'(g_\epsilon^{-1}(y))|^q} \tag{6.120}$$

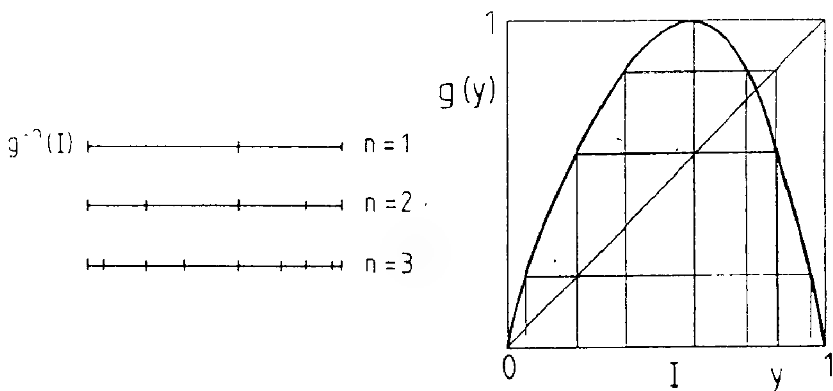


图6.8 函数 g(y)

最大特征值λ(β,q)的定义同λ(β)一样. 迭代从任一光滑正函数 $Q_0(x,y)$开始,存在唯一的 λ(β,q),使 n→∞时迭代收敛于有穷极限 Q(x,y),且

$$\lambda(\beta,q)=\exp(-\beta\, G(\beta,q)) \tag{6.121}$$

上式提供了计算 Gibbs 磁势的另一有力方法. 因为函数 g(x)的选择是任意的,因此可以研究整个分布族. 例如一个分段线性函数 g(x)产生一个乘法测度(这在物理学中是相当普通的). 在相同支集上更复杂的测度映射对应于更一般的分布. 但是我们的目的不是讨论 g 的选择,而是要建立多重分形测度的分类并特别感兴趣于相变.

从动力系统的观点看,由映射 f(x)定义的自然不变测度(见§6)是特别重要的,而且可以找到与其对应的 g(y). 尤其对(6.120)的深入讨论,为混沌吸引子维数相变机制的研究,带来了新的希望.

假设(6.120)是双曲性的,即对充分大的 n,迭代 f^n 和 g^n 是扩张且在 f、g 的不变集中所有点有有限斜率,这蕴含着测度映射在其支集 I=(0,1)上必须有局部线性最大值.

由 f、g 的定义，在第 n 步，长度标度 $l_i^{(n)}$ 和测度 $p_i^{(n)}$ 分别为

$$l_i^{(n)}=f_i^{-n}(I) \qquad p_i^{(n)}=g_i^{-n}(I) \tag{6.122}$$

$i=1,2,\cdots 2^n$， $l_i^{(n)}$ 恰恰是使 f^n 单调的那些区间. 双曲性意味着，在这些区间上没有折皱或分歧点. f^n 的图像在每一这样的小段上可以用斜率为 $f^{n\prime}(\langle x_i\rangle)$ 的直线来逼近，其中 $\langle x_i\rangle$ 可以是区间内任一点. 因为在第 n 步，区间被映到 I 上，因此 $l_i^{(n)}$ 可渐近表示为

$$l_i^{(n)}\sim 1/|f^{n\prime}(\langle x_i\rangle)| \tag{6.123}$$

类似地，若 g 也是双曲的，则

$$p_i^{(n)}\sim 1/|g^{n\prime}(\langle y_i\rangle)| \tag{6.124}$$

$\langle y_i\rangle$ 是区间 $g_i^{-n}(I)$ 内任一点.

对(6.120)作 n 次迭代，并将 $Q_n(x,y)$ 与初始函数联系起来，结果方程右端包含了 f^n, g^n

$$\lambda^n(\beta,q)Q^n(x,y)=\sum_{i=1}^{2^n}\frac{Q_0(x_i,y_i)}{|f^{n\prime}(x_i)|^\beta|g^{n\prime}(y_i)|^q} \tag{6.125}$$

式中 x_i 和 y_i 是 x 和 y 的第 n 前象，且沿相同符号的轨道取值. 记

$$F_\epsilon=f_\epsilon^{-1}, \qquad G_\epsilon=g_\epsilon^{-1} \tag{6.126}$$

约定 $\epsilon=0$ 是使 f 或 g 增加的分支，这样

$$x_i=F_{\epsilon_1}\circ F_{\epsilon_2}\circ\cdots\circ F_{\epsilon_n}(x)$$

$$y_i=G_{\epsilon_1}\circ G_{\epsilon_2}\circ\cdots\circ G_{\epsilon_n}(x) \tag{6.127}$$

上述各 ϵ_i 取值0或1.

由于 $\lambda(\beta,q)$ 通过有穷极限函数 $Q(x,y)$ 的存在性来确定，所以对大 n，可将(6.125)改写成

$$\lambda^n(\beta,q)=\sum_{i=1}^{2^n}\frac{Q_0(x_i,y_i)}{|f^{n\prime}(x_i)|^\beta|g^{n\prime}(y_i)|^q}\Big/Q(x,y) \tag{6.128}$$

取初始函数为恒等映射，则当

$$Z_n(\beta,q,x,y)\sim\lambda_n(\beta,q) \tag{6.129}$$

时，$\lambda(\beta,q)$ 可用配分和表示为

$$Z_n(\beta,q,x,y)=\sum_{i=1}^{2^n}1\Big/|f^{n'}(x_i)|^\beta|g^{n'}(y_i)|^q \tag{6.130}$$

把(6.123)与(6.124)与上式比较知

$$Z_n(\beta,q)\sim Z_n(\beta,q,x,y) \tag{6.131}$$

此式说明,可通过配分和在数值上推断 Frobenius－Perron 方程的最大特征值 $\lambda(\beta,q)$,在双曲和非双曲两种情形,都依赖于配分和(6.130). 将(6.129)改写成

$$\ln\lambda(\beta,q)\simeq\ln Z_n(\beta,q,x,y)-\ln Z_{n-1}(\beta,q,x,y) \tag{6.132}$$

对充分大的 n,上式不依赖于 x,y,表明它们位于支集 I 内. 建立完全二进树算法,配分和(6.130)的计算是容易的. 且由(6.128),可以求得特征函数

$$Q(x,y)=\lambda^{-n}(\beta,q)Z_n(\beta,q,x,y) \tag{6.133}$$

通过(6.120)的奇异性可分析相变. 设 $Q_0(x,y)\equiv1$,第一次迭代在 $x,y=1$的奇异性表示为

$$Q_1(x\to1,y\to1)\sim(1-x)^{-\sigma_1(\beta)}(1-y)^{-\sigma_2(q)} \tag{6.134}$$

式中

$$\sigma_1(\beta)=(1-\frac{1}{m_1})\beta,\qquad \sigma_2(q)=(1-\frac{1}{m_2})q \tag{6.135}$$

m_1,m_2分别表示 f 和 g 的最大值的阶,Q_1将在单位正方形上保持光滑. 下一次迭代,在 $x,y=1$附近,奇异性不变,可以得到

$$\lambda(\beta,q)Q_2(x\ll1,y\ll1)=\frac{A}{a_1^\beta b_1^q}+\frac{Bx^{-\sigma_1(\beta)}y^{-\sigma_2(q)}}{a_2^\beta b_2^q} \tag{6.136}$$

这里 a_1,b_1表示 f,g 在 $x=0$的斜率,a_2,b_2表示 f,g 在 $x=1$的斜率,A,B 为常数. 若 σ_1,σ_2为正,则第二项处于支配地位,在原点附近与点(1,1)附近有相同的奇异性,以后的迭代也是一样. 但是,若 $\sigma_1<0$或 $\sigma_2<0$,令 $x\to0$(或 $y\to0$),则知道第一项处于支配地位. 结果 $Q_2(x)$在 $x=0$(或 $y=0$)有一个有限值. 这一性质在进一步的迭代中可能不变,因此

$$\lambda_0(\beta,q)\equiv\exp(-\beta G_0(\beta,q))=a_1^{\beta}b_1^{-q} \quad (6.137)$$

是一个可能的特征值，且对$m_1,m_2\geqslant 1$的映射，这个特征值仅对$\beta<0$(当 f 是非双曲的)或对$q<0$(当 g 是非双曲的)存在.

上述讨论说明，当初始函数在$x=0,1$是σ_1奇异，在$y=0,1$是σ_2奇异时，例如

$$Q_0(x,y)=[x(1-x)]^{-\sigma_1(\beta)}[y(1-y)]^{-\sigma_2(q)} \quad (6.138)$$

则在第 n 次迭代也将具有相同的奇异性，特征值$\lambda_0(\beta,q)$不出现，而特征值$\lambda_1(\beta,q)\equiv\exp(-\beta G_1(\beta,q))$保证了收敛性.

对于光滑初始函数$Q_0(x,y)$，在β和q的一定取值范围内，$Q_0(x,y)$与(6.138)有相同奇异性. 因此，$\lambda(\beta,q)=\lambda_1(\beta,q)$. 但$\lambda_0(\beta,q)$在数量上超过$\lambda_1(\beta,q)$并使迭代逼近一光滑函数. 于是，最大特征值等于$\max\{\lambda_0(\beta,q),\lambda_1(\beta,q)\}$，因此

$$\beta G(\beta,q)=\min(\beta G_0(\beta,q),\beta G_1(\beta,q)) \quad (6.139)$$

在分支的交点，Gibbs 势的图中出现一个断裂，它发生在依赖于 q 的一个临界逆温度$\beta_c(q)$处，定义为$G_0(\beta_c(q),q)=G_1(\beta_c(q),q)$. 因为 G 的一阶导数不连续，所以它对应于一阶变化. 在$\lambda(\beta,q)=\lambda_0(\beta,q)$的范围内，Gibbs 势可表成显函数

$$\beta G(\beta,q)=\beta G_0(\beta,q)\equiv\beta\ln a_1+q\ln b_1 \quad (6.140)$$

这是由于该分布单独地来自原点附近的点. 长度标度或测度映射的非双曲性是导致这一特征的充分条件. (6.140)成立的区域称为压缩相(condensed). 对其余情况，非线性局部最大值的出现不起本质作用，称作双曲相. G_1(在压缩相中不同于 G)可看作双曲 Gibbs 势(不包含原点的贡献).

图6.9给出了整体Gibbs势的结果. 这里$f=4.5x(1-x)$而$g=4y(1-y)$. f 的分形支集是双曲的而测度映射 g 不是双曲的. 图中虚线表示临界线，q 取负值时出现相变.

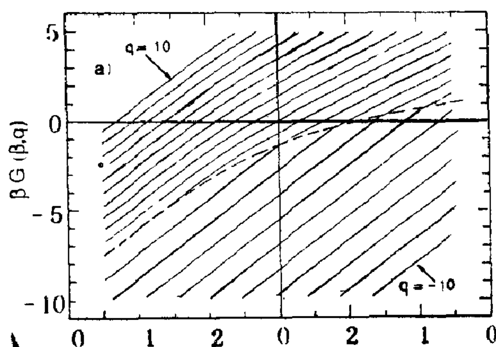


图6.9 Gibbs 势

在（β，βG（β，q））平面上定义一条联系相变点的临界线（图中虚线）. 在维数、熵或 Lyapunov 指数谱中是否存在奇异性，依赖于临界线的位置. 若临界线与β轴相交，则存在一个临界值 q_c，使 G_0（β，q_c）和 G_1（β，q_c）为零时的贡献相等. 这时，$q \neq q_c$ 的 D（q）值可以从不同分支求得，因而 D′（q）在 q_c 处不连续. 这里 $\beta_c(q_c) = (1-q_c)D(q_c)$. 因为 G_0 已知，因此在压缩相，D（q）有显式表示

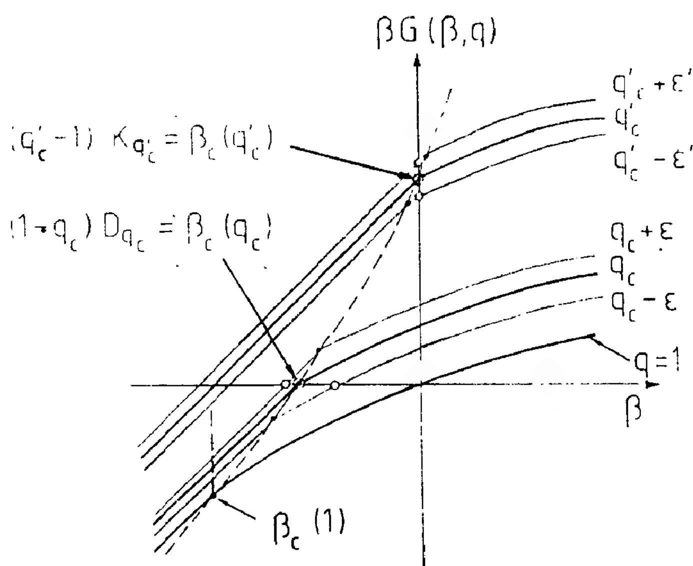
$$D(q)=\frac{q}{q-1}\ln b_1/\ln a_1 \tag{6.141}$$

这一结果具有普遍性,因为它仅涉及长度标度和测度映射的斜率，并给出了为什么 q/(q－1)依赖性在具有相变的维数谱中如此普遍的一般性解释：图6.9中压缩相在 q 的负值区显示出来,关系式(6.141)在 $q \leqslant q_c = -2.742$ 成立. 双曲相的维数可由 Gibbs 势与水平轴的交来决定,如图6.10(b).

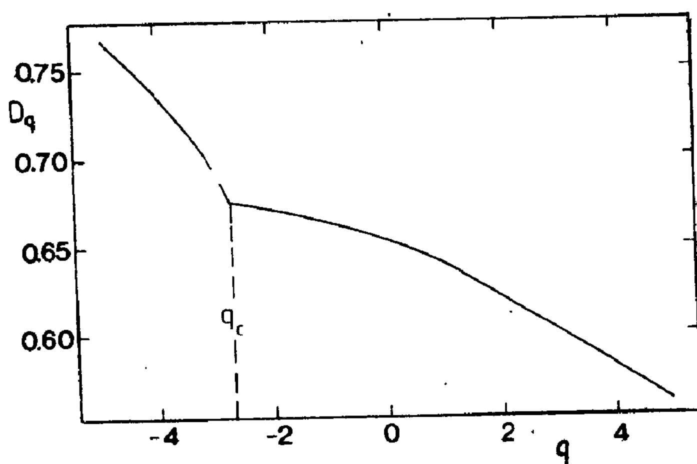
若临界线与垂直轴交于某 q_c',用同样方式可得到具有不连续导数的熵谱,如图6.10(a). 压缩相中熵谱

$$K(q)=\frac{q}{q-1}\ln b_1 \tag{6.142}$$

它只依赖于测度映射的斜率. 图6.9的例中 $q_c' = -1$,且当 $q \leqslant q_c'$



a 导数不连续的熵谱的确定



b 双曲相中维数的确定，q_c 是相变临界点

图6.10

时，(6.142)成立.

熵谱总是与测度映射 g 的自由能 $F_g(q)$联系在一起的. 从双变量 Frobenius－Perron 方程可以导出

$$K(q)=\frac{q}{q-1}F_g(q) \tag{6.143}$$

因此仅当 $F_g(q)$存在相变时，熵谱才出现相变。图6.9中，g 是 Logistic 抛物线，$F_g(\beta)$在 $\beta_c=-1$时有相变. 而

$$\beta F_g(\beta)=(\beta-1)\ln 2 \quad (\beta>-1) \tag{6.144}$$

于是可以决定双曲相中完备熵谱

$$K(q)=\ln 2 \qquad (q>-1)$$

若临界直线在某一 $\beta_c(1)$交 Gibbs 势曲线于 q＝1，Lyapunov 谱在 $q_c^*=-\beta_c(1)$时有不同的左、右导数，在压缩相得

$$\lambda_q=\ln a_1-\ln b_1/q \tag{6.145}$$

在图6.9中对 q 的正值没有相变，故 Lyapunov 谱是光滑的. 选取与(6.138)有相同奇异性的初始函数，从(6.125)知道，对大 n

$$\ln\lambda_1(\beta,q)\sim\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{2^n}\frac{Q_0(x_i,y_i)}{|f^{n'}(x_i)|^{\beta}|g^{n'}(y_i)|^{q}} \tag{6.146}$$

若(x_1,y_1)恰恰是最接近原点的某一(x，y)的前象，则仅保留和式中 i＝1的项可作出 $\lambda_1(\beta,q)$的下界

$$\ln\lambda_1(\beta,q)\geqslant\frac{1}{n}\ln\frac{Q_0(x_1,y_1)}{|f^{n'}(x_i)|^{\beta}|g^{n'}|(y_i)|^{q}} \tag{6\quad 157}$$

对大 n， $x_1\sim a_1^{-n}$，$y_1\sim b_1^{-n}$，原点邻近

$$Q_0(x,y)\sim x^{-(1-1/m_1)\beta}y^{-(1-1/m_2)q},$$

从而

$$\frac{Q_0(x_1,y_1)}{|f^{n'}(x_1)|^{\beta}|g^{n'}(y_1)|^{q}}\sim a_1^{-n\beta/m_1}b_1^{-nq/m_2} \tag{6.148}$$

由此可得

$$\beta G(\beta,q)\leqslant\frac{\beta}{m_1}\ln a_1+\frac{q}{m_2}\ln b_1 \tag{6.149}$$

此上界对任意 β,q 和双曲、非双曲两种情形都成立.

假定 g 在 $y=0$ 有极不稳定的不动点,即 $\ln b_1=\infty$,结果 $i=1$ 的项权重极小,其衰减快于指数 n 衰减.(6.149)蕴含着,对负 q 值,$\beta G(\beta,q)=-\infty$,在 $q=0_-$ 处发生一个相变.

作为推论,维数和熵谱仅对非负 q 是良定的,即

$D(q)=K(q)=\infty \qquad q<0$

最近关于生长现象的研究为 DLA 集团中 Renyi 维数的相变提供了佐证.在负 q,有限维数不存在,这是完全屏蔽效应的结果.

§7 混沌动力系统自然测度中的相变

本节我们讨论一维混沌映射的吸引子和非双曲排斥子的自然测度产生的多重分形谱的相变.设吸引子或排斥子由一些盒子完全覆盖.如例6.5所述,定义于一盒子上的自然测度,指吸引子或排斥子上随机选取的一点落入该盒子的概率.

一.混沌吸引子

人们早就知道一维非双曲映射的维数谱关于自然测度产生相变.因为维数谱只包含了几何信息,所以在相同系统的自由能中发现的相变完全不同.现在我们将这些相变联系起来,且说明维数的非解析特征来自 $G(\beta,q)$ 在 q_c 的相变.它和自由能中的相变是同类型的.

首先考虑函数 g 产生的自然测度.对某些非双曲映射 f,可以通过共轭和双曲映射联系起来, 产生的双曲映射 $\tilde{f}$ 也定义在 $I=(0,1)$ 上,其自然测度有常数密度.由 $\tilde{f}^{-1}(I)$ 产生的长度标度恰恰是关于 $\tilde{f}$ 的支集的第 n 次前像所得区间的测度, 即 $\tilde{f}$ 就是测度映射 g

$$\tilde{f}(x)=H(f(H^{-1}(x)) \tag{6.150}$$

其中共轭函数 H 恰是映射 $f(x)$ 的不变密度 $\rho(x)$ 的积分

$$H(x)=\int_0^x \rho(s)ds$$

为讨论压缩相的 Gibbs 势，只须确定测度映射$\tilde{f}$在原点周围的斜率$\tilde{c}$. 不变密度是原来的Frobenius－Perron方程(6.120)中$\beta=1,q=0$的稳定解. 上节的讨论已说明f在原点邻近的m一阶最大值$\rho(x)\sim x^{-1+\frac{1}{m}}$，于是$H^{-1}(x)=(x/c)^m$，c是常数. 那么从(6.150)得到$\tilde{f}=c^{1/m}x, x\to 0$，c是f在原点的斜率. 在(6.140)中，取$b_1=\tilde{c}=c^{1/m}$，对非双曲映射的自然测度，在压缩相中可求得

$$\beta G_0(\beta,q)=(\beta+q/m)\ln c \tag{6.151}$$

在双曲相中，Gibbs 势易确定，不必构造$\tilde{f}$. 端点 $x=0,1$的贡献在双曲相中可以忽略，且最大特征值 $\lambda(\beta,q)$ 与(6.138)的初始函数特征值相同，$\lambda(\beta,q)=\lambda_1(\beta,q)$. 因为测度只在支集的两个端点具有奇异性，而在0,1的一个小邻域外的所有盒子中都是光滑密度，故这种盒子的测度正比于长度. 在双变量 Frobenius－Perron 方程中令 $x=y$，(6.125)可改写成

$$\ln\lambda_1(\beta,q)\sim\frac{1}{n}\ln\sum_i{}' 1/|f^{n'}(x_i)|^{\beta+q} \tag{6.152}$$

其中$\sum'$表示受限和，即不包含0或1的一个充分小，但与 n 无关邻域的贡献. 右端恰是$-\beta F_1(\beta)$. 这里 $F_1(\beta)$是刻划长度标度分布的双曲自由能函数(忽略极大盒子). 在双曲相中，$\lambda_1(\beta,q)=\exp(-\beta G_1(\beta,q))$，可求得

$$\beta G_1(\beta,q)=sF_1(s)|_{s=\beta+q} \tag{6.153}$$

这表明，势中 q＝常数的曲线，可以简单地通过沿 β 轴移动 $\beta F_1(\beta)$的图而得到. 特别对 Logistic 映射 $f(x)=4x(1-x)$，$\beta G_1(\beta,q)=(\beta+q-1)\ln 2$. 从(6.151)可以发现，临界直线平行于铅直轴且过

$\beta=-1$.

在$D(q)$谱中，临界值q_c从$G_1(\beta(q_c),q_c)=0$求得. 因为吸引子总是分维等于1的区间，所以$F_1(1)=0$. 考虑q_c的两个分支G_0和G_1，可得$D(q_c)=1$，$q_c=m/(m-1)$. 从(6.141)，则得$D(q)=q/m(q-1)$.

与 $D(q)$谱比较，Lyapunov 指数的临界点似乎依赖于映射的细节. 而除奇异情形外熵谱中没有相变，说明这一特殊谱在一类广泛的变换下是不变的.

二. 混沌排斥子

由于映射的最大值产生的瞬变混沌位于其支集之外，因此混沌排斥子通常是双曲型的. 为了便于研究，考虑一般情形特征值的形式类比. 设测度映射 g 是开映射，根据(6.122)，g 产生的区间长度不是归一的. 为定义测度，推广(6.122)为

$$p_i^{(n)}=g_i^{-n}(I)\Big/\sum\nolimits_j g_j^{-n}(I) \tag{6.154}$$

根据测度映射在 $\beta=1$的自由能，分母呈指数 n 衰减. 记

$$p_i^{(n)}\sim e^{\upsilon n}g_i^{-n}(I) \tag{6.155}$$

这里 $\upsilon=F_g(1)$是一个正数. 将(6.121)用下式代替

$$\lambda(\beta,q)=\exp[(-\beta G(\beta,q)-\upsilon q)n] \tag{6.156}$$

这表明将 Gibbs 势与双变量 Frobenius—Perron 方程的最大特征值 $\lambda(\beta,q)$比较时，要考虑一个平凡因子.

排斥子的不变密度是Frobenius－Perron方程(6.118)在$\beta=1$时的特征函数. 特征值$\lambda(1)=\exp(-\delta)$，$\delta=F(1)$是逃逸率，刻画f的不变集的排斥强度. 从前述分析知，$\rho(x)$在$x=0,1$有指数$(-1+\frac{1}{m})$的幂律特征，于是极大盒子的测度正比于尺度的 1/m 次幂. 在其它盒子中，测度正比于长度. 极大盒子尺度取为c^{-n}，归一化条件可写为

$$1=\sum_{i=1}^{2^n}p_i^{(n)}\sim D^{(n)}[c^{-n/m}+a\sum{}' l_i^{(n)}] \qquad (6.167)$$

式中 a 是常数，括号中第二项表示限制和，它正比于 $\exp(-\delta\lambda')$ 且支配第一项. 从上界(6.149)可推知，对 $q=0,\beta=1$ 有 $\delta\leqslant \ln c/m$. 因此重正化因子是 $D^{(n)}\sim\exp\delta n$. 与(6.155)比较可知，对非双曲排斥子，(6.156)成立，且 υ 是排斥子的逃逸率.

第一盒子标度为 $c^{-n/m}$ 的测度性质意味着测度映射在原点的斜率 $c'=c^{1/m}$. 于是在压缩相中，从(6.137)得

$$\lambda_0(\beta,q)=c^{-(\beta+q/m)^n} \qquad (6.158)$$

对 Gibbs 势由(6.156)求得

$$\beta G_0(\beta,q)=(\beta+q/m)\ln c-\delta q \qquad (6.159)$$

在双曲相，仍由于中间盒子的测度正比于长度而导出(6.152). 在此相中，$\lambda(\beta,q)=\lambda_1(\beta,q)$，从(6.156)有

$$\beta G_1(\beta,q)=SF_1(s)|_{s=\beta+q}-\delta q \qquad (6.160)$$

对 f 的 Frobenius－Perron 方程，通过奇异性分析，仍说明自由能中不存在相变. 值得注意的是，在(6.160)中，令 $\beta\to0$，$q\to1$ 的极限情形，测度熵 K_1 可用 Lyapunov 指数和逃逸率 δ 表为 $K_1=\langle\lambda\rangle-\delta$，但这个关系只对排斥子的自然测度成立.

维数谱的 q_c 值可按如下步骤求得. 由于 G_0 和 G_1 的分支恰在 β 轴上相交，于是得

$$[\beta_c(q_c)+q_c/m]\ln c=sF_1(s)|_{s=\beta_c(q_c)+q_c} \qquad (6.161)$$

由(6.159)可以得到 q_c 的隐方程

$$sF_1(s)|_{s=q_c(1-1/m+\delta/\ln c)}=\delta q_c \qquad (6.162)$$

这样易通过作图来求解.

从(6.159)可求出压缩相中的广义维

$$D(q)=\left(\frac{1}{m}-\frac{\delta}{\ln c}\right)q/(q-1) \qquad (6.163)$$

由于现在测度支集是任意分形，该结果的适用范围没有吸引子情

形广泛，而且它包含了逃逸率和斜率. 但这种相关性在 $\delta \to 0$ 时不存在了. 在 δ 很小的情形，可以得到 q_c 的显式表示. 在 $\beta=1$ 邻近扩张 $\beta F(\beta)$，且由于此处导数恰是平均 Lyapunov 指数 $\langle\lambda\rangle$，只保留 δ 的一阶项，得

$$q_c \approx \frac{m}{m-1}\left[1-\frac{\delta}{m-1}\left(\frac{m}{\ln c}-\frac{1}{\langle\lambda\rangle}\right)\right] \tag{6.164}$$

除逃逸率和斜率外，Lyapunov 指数 $\langle\lambda\rangle$ 也出现在此式中. 尽管 Lyapunov 谱中存在非解析性(不可微)，但熵谱一般不出现相变. 事实上，运用 $q=0$ 时的上界(6.149)和(6.160)，记

$$\beta G_1(\beta,q)=(\beta/m+q/m)\ln c-\delta q-\triangle(\beta,q)$$

这里对 β,q 的任何有限值，$\triangle>0$，由这一分支和 G_0 的交可得

$$\beta_c(q)=-\frac{m}{m-1}\triangle(\beta_c(q),q)/\ln c \tag{6.165}$$

因△有限，这蕴含着临界线在任何有限 q 值处不与铅直轴相交.

三. 讨论与注记

引入两个单峰函数 $f(x)$，$g(y)$，分别作为长度标度和测度映射，其双变量Frobenius－Perron方程的最大特征值与Gibbs势 $G(\beta,q)$ 密切相关，这种相关性提供了确定 $G(\beta,q)$ 的数值方法，比用配分函数作数值计算更有效，而且迭代过程的奇异性分析可用来阐明最大特征值产生非解析性的根源.

由于可根据研究者的需要选择 $f(x)$ 和 $y(x)$. 因此可对多重分形热力学描述中的非解析性作一般性研究. 研究表明，Gibbs 势中的相变是一阶普通的，且存在压缩(凝聚 condensed)相，其中函数 $\beta G(\beta,q)$ 关于变量 β,q 是线性的，而且显示出普适性. 维数谱，熵和 Lyapunov 指数都显示出依赖于压缩相的变化. 在压缩相内，这些谱的 q——相关性是唯一的，维数和熵正比于 $q/(q-1)$，而 Lyapunov 指数由(6.145)表示.

当长度标度或测度快于或慢于指数衰减时，这种例外情形由

怪异变化(exotictransitions)刻画．存在一个区域，其中$\beta G(\beta,q)$与变量β,q之一完全无关，或为$\pm\infty$，这时维数与熵两者同时或者之一在q的整个范围内恒为0或∞，进一步可求得这些谱在$q>1$时为0，而$q<0$时为∞．最近的研究表明，DLA集团的生长概率存在这种奇异变化，即对$q<0$，$D(q)=K(q)=\infty$．

对混沌动力系统，其自然测度是特别重要的．Kovacs等对具有完备拓扑的一维映射的非双曲混沌吸引子构造了自然测度的Gibbs势，说明了维数谱中的相变来自于这种更一般的描述．另一例子是非双曲混沌排斥子的自然测度中的相变这一新现象．因为支集的分维可以是[0,1]间的任一数，维数谱的临界点没有吸引子普遍．还证明了熵谱一般是光滑的．但是，如果映射在原点是间断或极不稳定的，正如吸引子一样，可以预料熵谱中也出现相变．

值得一提的是，单变量时间序列的波谱推广到多变量的情形．Fujisaka等最近将离散马尔可夫过程的主方程推广到多变量而且应用于双曲情形，他们取两个单峰函数f,g且

$$\tilde{\lambda}(\beta,q)Q_{n+1}(x,y)=\sum_{\epsilon,\epsilon'=0,1}\frac{Q_n(f_\epsilon^{-1}(x),g_{\epsilon'}^{-1}(y))}{|f'(f_\epsilon^{-1}(x))|^\beta|g'(g_{\epsilon'}^{-1}(y))|^q} \tag{6.166}$$

其中$\tilde{\lambda}(\beta,q)$是特征值．它与(6.120)的差异在于，这里所取的前象是关于二维不可逆映射$(x'=f(x),y'=g(y))$，而不是对x,y规定相同符号道路．结果上式右端由四项组成，而(6.120)中只有两项．那里限制$\epsilon'=\epsilon$，而导出双变量Frobenius－Perron方程，在研究多重分形测度的热力学时是必要的．

注：本章§4－§6部分内容参考了闫海平、王雷、湛垦华在全国分形理论讲习班暨专题学术讨论会(1991，成都)的论文《多重分形的热力学和相变》．

第七章

结语与展望

在20世纪的数学宝库中，分形几何是一朵绚丽的奇葩．正如欧氏几何对初等数学、解析几何对于高等数学、拓扑学对于现代数学产生的深远影响一样，分形几何已对今天的数学乃至整个科学产生了较大影响．可以预料，它对未来的科学发展还将产生推动作用．

§1 分形几何对数学的影响

分形几何的思想来自传统数学中的反例．现在它却从正面进入到纯数学之中，并在一些数学领域，如数论、数字的分布、连分数、丢番图逼近；射影几何中的对偶和 Kakeya 问题；位势理论中的 Vitushkin 猜想的否定回答等问题中扮演着重要角色．尤其是，它是描述混沌动力系统奇异吸引子的有力的几何学．

分形几何的诞生，向传统的数学观念提出了新的挑战．它说明，不仅有必要研究那些光滑的、规则的形，而且更有必要研究那些非光滑和非规则的形．这是因为，在自然界中，在科学研究的各个领域中，前者凤毛麟角，后者不可胜数．数学作为自然科学的工

具，更应研究这些真实形态的数学规律及其数量关系.

分形几何学为数学工作者开辟了一片广阔的研究领域. 在数学的发展史上，值得回忆的是变量数学时期，由它兴起的许多分支在18、19世纪之交，已经达到丰沛茂密、绿叶成荫的境地. 然而，伴随着向数学进军的节节胜利，却带来一种消极情绪，似乎数学的宝藏已挖掘殆尽，再没有多大发展余地了. 到19世纪20年代，数学发生了一连串本质的变化，罗巴切夫斯基和包耶非欧几何的诞生；阿贝尔和伽罗瓦开创的近世代数；波尔察诺和柯西重新奠定分析学的严格逻辑基础；拓扑学和复变函数等簇新领域的兴起；黎曼拓广空间的概念，开创的黎曼几何学，为数学开辟了一片片的沃土，成千上万的数学工作者忙于耕耘，似乎有无穷无尽的工作要做，不少人直到今天还在忙碌着. 但有一些方面似乎无事可做了，适逢分形几何、混沌动力系统又一次为数学工作者提供了用武的园地. 分形几何的奠基者们已在分形集的结构及其分类、测度理论、维数理论、标度变换理论、动力系统、分形吸引子的结构与维数等方面辛勤耕耘，结出累累硕果，但是还有不少尚待开掘的宝藏，比如，建立既严格又简单的维数理论与计算方法，很多动力系统中分形吸引子的维数，Mandelbrot 集的某些性质等等正待有志者去研究. 有些方面，拓荒者们曾抡过几锄，还留下片片宝地，有待人们去探索.

研究分形集的方法和工具也还有待于建立、发展和完善，我们知道，解析几何、代数几何正是利用了代数学这一有力工具，微分几何学正是借助了强有力的分析学，才揭示了那些规则、光滑图形的深刻性质，但是，传统的代数和分析理论由于分形集的非解析性而不能发挥威力，因此，有必要建立新的代数和分析方法. 已有一些学者提出了 Gibbs 导数，分数维的高等代数、数学分析等等，在分数维的群与环、分数阶的微积分方面，也有一些初步的研究工作.

例7.1 分数维的群与环

固定$0<s<1$，设$n_1,n_2,\cdots$是一个快速增长的整数序列，比如说$n_{k+1}\geqslant\max\{n_k^k,3n_k^{1/s}\}$，对$r=1,2,\cdots$ 令

$$Fr=\{x\in\mathscr{R}\,|\,|x-\frac{p}{n_k}|\leqslant rn_k^{-1/s}\text{ 对某个整数 }p\text{ 和所有 }k\text{ 成立}\}\tag{7.1}$$

再设$F=\bigcup_{r=1}^{\infty}F_r$，则经计算求得$D_H(F)=s$，且F是在加法运算定义之下的$\mathscr{R}$的子群.

对于环的分析相当困难. 设$E\subset\mathscr{R}^2$，定义距离集

$$D(E)=\{|x-y|\,|\,x,y\in E\}\subset\mathscr{R}\tag{7.2}$$

定理7.1 设$E\subset\mathscr{R}^2$是一个Borel集，则

$$D_H(D(E))\geqslant\min\{1,D_H(E)-1/2\}$$

承认这一定理，不难证明，若$1/2<s<1$，则不存在维数为s的子环.

定理7.2 设F是在加法和乘法运算之下的$\mathscr{R}$的子环，若F是Borel集，则不可能有

$$1/2<D_H(F)<1$$

是否存在$\mathscr{R}$的(Borel)子环，使它的维数介于0和1/2之间，还是一个未解决的问题.

例7.2 分数阶的微积分

由于很大一类分形曲线和曲面在通常意义下不存在切线和切平面，欲建立分析工具研究分形图，一种合理的猜想是建立以Hausdorff测度为基础的分数阶微积分，迄今已有几种尝试.

一种办法是在普通微积分的基础上作相应的推广. 比如对正弦波函数e^{ikx}，关于任意实数s，仿整数阶微积分定义其s阶导数为

$$\frac{d^se^{ikx}}{dx^s}=(ik)^se^{ikx}\tag{7.3}$$

对一般函数 f(x)，依据富氏变换，定义分数阶导数为

$$\frac{d^s f(x)}{dx^s}=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}(-ik)^s\hat{f}(k)e^{ikx}dk \tag{7.4}$$

按上述办法，f(x)的 s 阶导数是否良定，依赖于广义积分的收敛性. 这一定义虽然直观，但不是很好的. 于是有下述定义

设 $\varphi(x)$在任意有限区间内可积，且在 $x\to\infty$时，$\varphi(x)$迅速收敛于0，则称

$$I^s\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\varphi(x-y)y^{s-1}dy \quad (s>0) \tag{7.5}$$

为 $\varphi(x)$的 s 阶积分；而称

$$I^s\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}pf\cdot\int_0^{\infty}\varphi(x-y)y^{s-1}dy \quad (s<0) \tag{7.6}$$

为 $\varphi(x)$的 s 阶微分. s 为实数，$\Gamma(s)$为嘎玛函数，pf 表示取发散积分的有限部分.

如此定义的 s 阶微积分 I^s 有下述性质

Ⅰ) $I^s(I^t\varphi)=I^{s+t}\varphi,\quad I^0\varphi=\varphi$ (7.7)

Ⅱ) s 为整数时，I^{-s}为普通微分

$$I^{-s}\varphi(x)=\frac{d^s\varphi(x)}{dx^s} \quad (s=0,1,2,\cdots,N) \tag{7.8}$$

Ⅲ) $I^s(x^t)=\Gamma(t+1)x^{s+t}/\Gamma(s+t+1) \quad x\geqslant 0$ (7.9)

Ⅳ) $I^s(e^{ax})=e^{ax}/a^s \quad (a>0)$ (7.10)

易见，这一定义仍是普通微积分的推广且保留了普通微积分的部分性质.

分数维的群与环，仅仅只有最初步的研究. 而分数阶的微积分也仅仅只有简单概念的引入. 如何把这些理论同豪斯道夫测度联系起来，象通常的分析学那样建立在严格的逻辑基础之上，并建立切实可行的计算方法等等，这些理论实际上还没有. 但目前已建立起 Hausdorff 距离和分形空间，并在“魔鬼的阶梯”等分形曲线的 Gibbs 导数方面进行了探索. 这表明，分数阶微积分理论已弹起悦

耳的前奏与序曲,这些理论的建立,无疑会产生数学史乃至科学史上的伟大革命.但应清醒地认识到,前进的道路必定是艰难曲折的,研究工作可能会遇到一个又一个陷井.我们相信,经过科学家们的共同努力,建立新理论的一天必定会来到.

分数阶微积分概念的引入,已提供了谱函数测定分形维数的方法.随着新的代数和分析理论的建立,将这些新的方法用来研究分形图形,建立象解析几何,代数几何,微分几何那样完美漂亮的几何理论是有可能的.甚至可以乐观地预言,有可能产生象统计推断与微分几何那样的概率分形几何理论.要构筑起这些坚不可摧、妙用无穷的科学理论,必将凝结千千万万征服者的汗水和心血.

另外,分形几何对于数学的重要影响还在于为数学教育的振兴提供了一个好机会.因为它的理论直观可见,涉及的形态具有巨大的审美感染力和各种应用,可以激发学生去了解这一令人迷惑和激动的领域,数学教育工作者应抓住这一契机,把我国的数学教育推向一个新台阶.

§2 分形几何对科学的影响

我们曾在引论中谈过,无论是在思想领域的突破上,还是在科学方法论的建树上,几何学总是扮演着开路先峰的角色,分形几何学正是二十世纪80年代科学思想和方法的一个突破口.

分形几何中的结构自相似概念,在信息论、控制论和系统论的巨大冲击之下,迅速发展到形态、功能、信息、时间等方面,升华为一种新的科学方法论——分形论.它是一种辩证的思维方法和认识方法,它与近年产生的耗散结构、突变论和协同学,在许多方面协调一致.又与系统论相辅相成,形成互补.

现代系统论认为,整体大于其孤立部分的总和.整体的性质和

规律只存在于其组成各要素的相互联系、相互作用中. 整体具有其组成部分在孤立状态时所没有的新性质，从而揭示了宏观的整体规律.

分形论认为，分形内部任何一个相对独立的部分，在一定程度上都应是整体的再现和相对缩影(分形元)，人们可以通过认识部分来认识整体. 但是分形元只是构成整体的单位，与整体相似，并不简单地等同于整体，整体的复杂性远远大于分形元. 更重要的是，分形理论指出了分形元构成整体所遵循的原则和规律，是对系统论的一个重要补充.

从分析事物的视角来看，分形论和系统论体现了从两个极端出发的思路，系统论从整体出发来确定各部分的系统性质，从宏观到微观考察整体与部分间的相关性. 而分形论则是从部分出发来确立整体的性质，沿着从微观到宏观的方向展开. 系统论强调部分对整体的依赖性，而分形论则强调整体对部分的依赖性，二者的互补构成了完整的辩证思维方法.

分形几何升腾为分形论，它的应用范围大大拓广了. 人们观察到了自然界、社会和人类思维活动中广泛存在的分形现象，认识到了分形的普遍性.

在自然科学的各个研究领域里，人们运用分形论，从数理化、天地生到医工农等领域都获得了许多新认识和新进展，如物理中的湍流与相变，化学中的高分子链、催化剂表面、凝胶、天文学中的星团分布、宇宙大尺度结构、地学中的渗流、地貌演化、地理中的河流与水系、医学中人体组织结构(如血管、肺、心脏等的分形描述)、材料的损伤断裂、石油开采中的掘进，…….

懂得分形的社会科学家和经济学家们观察到社会和经济活动中表现出的自相似现象，并用分形论来思考和研究社会与经济活动中的问题. 懂得分形思想的语言学家，运用分形论重新审视语言

与写作，如词频分布、写作过程中的中心与层次的嵌套．社会科学中应用分形论获得的新认识举不胜举．

思维科学是研究人的有意识思维的特点、规律、历史发展和人工模拟的科学．用脑思考脑，用思维求索思维，并不是陷入了自我相关的悖论，而正是分形的体现，在古代、近代和现代，人类的思维都有这样的特点．莫高窟的一只佛像，身上还刻有一万五千只小佛像，佛中有佛；一个寿字竟由一百个形态各异的寿字组成，寿中有寿；M.C 埃舍尔的版画"鱼和鳞"，不仅是鱼中有鳞、鳞中有鱼的嵌套结构，而且表现了鱼的补集又是鱼的互嵌韵律与形式美，体现了局部与整体的相似性．这些例子说明，人类的思维活动中存在着分形的规律．

有一些实验证明，大脑是按全息方式工作和分散存贮信息的，其道理就象激光全息照片一样．这正是分形论的精髓，每一个局部都是整体的缩影和再现．

分形论在科学思想和方法、认识论上产生重要作用的例子还有很多．概而言之，分形论的提出，对科学的认识论和方法论有下述深远意义：分形论揭示了整体与部分之间的内在联系，找到了从部分过渡到整体的媒介和桥梁，说明了部分与整体之间的信息"同构"；分形与混沌的普遍性和密切联系，打破了学科间条块分割的局面，使各个领域的思想家团结到一起，为描述非线性复杂系统提供了简单的几何语言，使科学家对系统的思维方法从线性进展到非线性．并与系统论互补，揭示了系统多层面、多视角、多维度的联系方式，从一个新的层面深化和丰富了局部与整体之间的辩证关系，为人们认识世界提供了一种新的方法论，使人们得以从局部认识整体．从有限中认识无限，从非规则中认识规则，从混沌中认识有序．

分形与混沌动力系统理论进一步丰富和深化了唯物辩证法关

于普遍联系和世界统一性原理.分形论从一个特定层面直接揭示了宇宙的统一图景,而分形与动力系统可以共同对世界物质统一性从时态与历时性两个维度上展开说明:动力系统理论说明,自然界中蕴含着历史的演化与嬗变的信息;另一方面,分形元与分形系统之间普遍的信息同构关系编织了一张世界统一的网络.

§3 分形几何面临的难题与挑战

分形论来源于数学,分形论中很多急待解决的问题,追根朔源,本质上仍回归到数学问题的解决.因此,分形几何学面临着巨大的难题和严峻的挑战.

现在,虽然已有一些实力雄厚的数学家静心从事于分形几何基本理论的研究,也有一些热心的新人正在或准备投入这一行列.但是,分形理论的数学基础,比如测度理论、维数理论与简单有效算法、分数维的群与环、分数阶的微积分,Gibbs 导数等研究难度大,有些基础工作刚刚开头,理论还未形成.基础研究较之应用,进展相对缓慢.在第二届全国分形理论及其应用学术讨论会上,数学家认为,较之应用,分形理论的数学基础研究越来越觉得薄弱.因此,加强基础研究,势在必行.

相比之下,分形论的应用范围广,卷入这一领域的人数众多,应用的发展超过数学本身的发展并有增长趋势.分形几何不失为描述世界的一种简洁有力的工具,但物理学家及其它方面的科学家们还想知道得更多.他们还想解释世界,并力图作出预报与控制.他们为数学提出了更新更高的要求,希望数学能提供更好更有效力的工具,数学家们面临着严峻的挑战.

分形几何理论能提供的几何不变量目前主要是各种维数和临界指数,有时候,通过实验测定、计算机模拟和理论分析确定的维

数惊人地一致，并能有效地用于确定某些物理过程的主要特征. 但是很多时候，维数意义的解释却是一个难题. 比如"浮云的投影为什么会在一个较大的尺度范围内有维数为1.35的边界?"，"金属表面的维数如何影响它的物理性质，比如它的热辐射或摩擦系数?"，"使地形的维数为2.2的地质学过程是什么?". 在有关分形的会议上，常常也会听到"维数干什么用?"，"这一维数的物理意义是什么?"等等问题. 一方面，应努力使这些问题在分形模型的框架内得到解答. 一方面，我们也不能对分形维数期望值过高，指望一个维数就能包打天下. 事实上，也不可能有"万能理论"或"万能参数".

应当清醒地认识到，自然界中的形态常常是非常复杂甚至难以描述的，在建立这些系统的分形模型时，仍然需要某些假设和近似，当然，建立的分形模型应能表明系统的基本物理特征，带有维数这样的不变量，并能进行数值处理，而且这种模型应能解释物理特征依赖各种不同参数的原因，最理想的还应有预极性或控制性.

达到上述目标并非不可能. 要建立这样的模型，相应的专业知识是必不可少的，有力的数学工具和方法也是非常必要的. 除了充分应用已经建立起来的理论和方法以外，应尽可能快地建立起分析分形图形的新的有力方法与理论，诸如代数理论、分析理论等，并进一步改进测度与维数理论，使维数的计算既严格又简便. 这对于分形几何学，也是严峻的挑战.

后记

分形几何是现代数学的一个重要分支，也是当代非线性科学中的一个活跃领域，特别是关于混沌运动的几何语言．由于世界的本质是非线性的，而混沌现象又是四处可见，因此分形几何的应用领域是非常广泛的，其发展势头看好．近两年内，国外有十余种与分形有关的学术刊物诞生，其中《混沌、孤子和分形》（英国培格曼出版社）和《分形学》（新加坡世界科学出版社）两个国际刊物的影响尤为突出．

有人认为，分形几何已成为一种新的方法论，不但对自然科学，而且对哲学及社会科学都有冲击和启迪作用．关于分形的书籍，国内外均有出版．它们有的出自于纯数学家之手，有的则由实验科学家所撰．前者数学味道太浓厚，内涵太深奥，对于数学功底不深厚而又渴望尽快学习和掌握这门新理论的一般读者来说，往往是苦读而收获甚微，不易受益；后者又太粗浅和面窄，常常囿于某一专题的研究，读者难以全面、系统和深刻理解分形几何的精神实质，不易达到学以致用的目的．因此，很需要一本介于纯数学与应用之间的过渡性读物．本书就是在这种背景下写成的．

分形几何是一门处于迅速发展中的科学，几乎每日都有新成果问世．要全面概括这方面的最新成就是十分困难的．加之作者才疏学浅，书中错误必定不少，敬请读者不吝赐教．

作者

一九九二年十月于成都

参 考 文 献

书 籍

1. Falconer, K. , Fractal Geometry: Mathematical Foundation and Application, John Wiley and Sons, (1989)

2. Shuster, H. G. , Deterministic Chaos: An Introduction VCH, (1988)

3. Feder, J. , Fractals, Plenum (1988)

4. Palis, J. and de Melo, Jr. W. Geometric Theory of Dynamic Systems; An Introduction, Springer—Verlag (1982).

5. Barnsley, M. F. , Fractal Everywhere, Academic Press Inc. , (1988)

6. Cleick, J. , Chaos: Making A New Science, Viking Penguin Inc. New York (1988) (张淑誉译,上海译文出版社)

7. Mandelbrot, B. B. , The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, W. H. Freeman and Co (1982)

8. 李后强,程光钺,《分形与分维》,四川教育出版社(1990)

9. 张筑生,《微分动力系统原理》,科学出版社(1987)

论 文

1. Hutchion, J. E. Indina University Math. Journal, Vol30, No5, (1981) 713

2. Mandelbrot, B. B. , Self—affine Fractal Sets, I , II , III , in Fractal in Phys, ed by Pietronero, L and Tosatti, E. , Northhol-

nand,(1986)

3. Dekking,F. M. ,Advances in Mathematics 44,(1982),78—104

4. Grebogi,C. McDonald,S. W. ,Ott,E. ,and Yorke,J. A. Physics Letters,110A,N01(1985)1.

5. Nakamura,K. ,Okazaki,Y. ,Physics Letters A,117(1986)459.

6. 文志英等,《分形理论及其应用—全国分形理论及其应用学术讨论会文集》,程光钺编,四川大学出版社,(1989),5

7. 李家龙等,《分形理论及其应用—全国分形理论及其应用学术讨论会文集》,程光钺编,四川大学出版社,(1989),3

8. 钟红柳,《分形理论及其应用—全国分形理论及其应用学术讨论会文集》,程光钺编,四川大学出版社,(1989),4

9. 汪富泉、李后强,一类分形集及其刻划,应用数学(待发表).

10. Umberger,D. K. and Farmer,J. D. ,Phys,Rev,Lett,55(1985),661

11. 许友,数学年刊 A,1(1992),111—114

12. Lorenz,E. N. ,J. Atmos,Sci. ,20(1963),130—141

13. Henon,M. ,Comm,Math Phys,50(1976),69—77

14. Ruelle,D. and Takens,F. ,Comm Math Phys,82(1981)

15. Ruelle,D. ,Small Random Pertubations and the Definition of Attractors,in Geometric Dynamics,ed by Palis Jr,J. ,Lecture Notes in Math. ,1007 Springer—Verlag,Berlin,Heiderberg,1983

16. Lauwerier,H. A. ,J. of Appl. Math. ,1986

17. Lauwerier,H. A. ,Physica7D(1983),146—154

18. Farmer,J. D. Ott,E. and Yorke,J. A. Physica7D(1983),

153—180

19. Fredrickson, P. , Kaplan, J. L. and Yorke, J. A. , J. Diff Eq. ,49(1985),185

20. Grebogi, C. , Ott, E. and Yorke, J. A. , Ergod Th. & Dyam,Sys. ,5(1985)341—370

21. Douady,A. and Hubbard,J. ,C. R. Acad,Sci,294(1982), 123—126

22. Mandelbrot, B. B. , Ann. New York Acad, Sci, 357 (1980),249—259

23. Herman,P. R. ,Bull Soc,Math France tome112(1984), 1,93—142

24. Ruelle,D. ,Analytic Repellers,J. Ergod,Th,& Dynam. sys 1982

25. Devaney,R. L. and Tangerman F. ,Ergod Th & Dynam. Sys. b(1986),498—503

26. Young L. —S. Ergod Th & Dynam. Sys. 2(1982),109

27. Branner,B. ,in Introductory Survey Lectures on Chaos and Fractals. The mathematics behind the computer graphics. Providence, Rhode Island, August6 — 7, 1988(又见数学译林, Vol8,N03—4,177)

28. Keen,L. ,in Chaos and Fractals: The Mathematics behind the Computer Graphics Lecture Notes(1988)1—35(又见数学译林 Vol8,N04,306)

29. 黄永念,中国科学 A 辑8(1991)

30. Beck. C. Physica D41(1990),67

31. 汪富泉、李后强,四川师院学报 Vol14,N0(1993),1—7

32. 李后强、汪富泉,大自然探索,Vol11,No2,(1991). 56

33. Szépfalusy, P. , Tél, T. , Gsordás, A, and Kovács, z. , Phys, Rev A 36(1987), 3525

34. Håkansson, J. Phys Rev A41(1990), 1855

35. Kohmoto, M. , Phys Rev A37(1988)1345

36. Feigenbaum, M. J. , J. Stat Phys 46(1987), 919

37. Szépfalusy, P. Györgyi, G, Phys, Rev A33(1986), 2852

38. Tél T. , Phys Rev A36(1987), 2507

39. Mecauley, J. L, Phys, Rep, 189(1990), 225

40. Csordás A. , Szépfalusy, P and Fulop A, Phys, Rev A38, (1988), 2582

41. Csordás, A, and Szépfalusy, P. , Phys, Rev A39(1989), 4767)

42. 杨路、张景中、曾振柄,数学进展,19(2) (1990)137—188

[General Information]
□□=□□□□□□□□□
□□=□□□ □□□
□□=234
SS□=10069982
DX□=
□□□□=1993□10□□1□
□□□=□□□□□□□□

3 [illegible]
4 [illegible]
5 [illegible]
6 [illegible]
7 [illegible]
8 [illegible]
9 [illegible]

[illegible] [illegible]

1 [illegible]
2 [illegible]
3 D(q) [illegible]
4 [illegible]
5 [illegible]
6 [illegible]
7 [illegible]

[illegible] [illegible]

1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]